趣味图论

柯　炅　编著

中国青年出版社

封面设计：韩　琳
插　　图：朱　静　刘茗蕃

趣味图论

柯　旻　编著

*

中国青年出版社出版　发行
中国青年出版社印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×1092　1/32　5.25印张　78千字
1987年12月北京第1版　1987年12月北京第1次印刷
印数1—4,000册　定价1.10元

内容提要

图论是近年来发展比较快的一个数学分支。由于它的形象和直观，作为一个得力的工具，它已经被广泛地应用于物理学、化学、生物学、计算机科学、运筹学、心理学、语言学、社会学等众多的自然科学和社会科学领域。

本书通过大量日常生活和工作中的生动事实和有趣的智力游戏，比较通俗而全面地介绍了图论的一些基本概念、主要分支、重要定理以及它们的应用，并且还介绍了图论本身的一些重大课题的突破，例如著名的"四色猜想"问题。

本书的目的是使读者对图论这一数学分支能够有所了解，并能从中学会一些分析问题和解决问题的具体方法。

致 读 者

当你翻开这本小册子的时候，也许在想：图论是指什么呢？这里的"图"和一般的图有什么不同吗？

是的，这里的图和一般的图，也就是古希腊数学家欧几里得（约前 330-前 275）所建立的欧几里得几何中的图是不相同的，它属于另一种图。这种图对于你来说可能还是陌生的，然而它的应用范围却是无限广阔的。它可以应用于你的周围，应用于你的生活、学习和工作之中。

1736 年，瑞士大数学家欧勒（1707-1783）①由解哥尼斯堡七桥问题②而创立了图论这门学科，到现在已经有两百多年的历史了。然而，由于社会历史条件的限制，在前一百多年间，图论的发展是缓慢的。直到本世纪中叶，随着当代科学技术的飞速发展，随着数学对各个领域的渗透，图论——这门沉睡了多年的学科，才逐渐苏醒过来，开始焕发出青春的活力。由于它所具有的特殊功能——它能解决许多用传统的数学方法无法解决的问题；由于它的形象和直观，因

① 欧勒也译作欧拉。

② 哥尼斯堡是加里宁格勒的旧称。哥尼斯堡原来是德国东普鲁士的城市，1945 年根据波茨坦会议的决定划给苏联，1946 年改称加里宁格勒，是苏联西端沿波罗的海的一个不冻港。十八世纪，那个城市里有七座桥。当时城里居民热衷于解一个难题：一个散步的人怎样能一次走遍七座桥，每座桥只走过一次，最后回到出发点。这实际只是一个"一笔画问题"，1736 年欧勒加以解决，答案是不可能。关于一笔画，参看后面第三章，练习三里介绍了七桥问题。

此，作为一个得力的工具，它已经被广泛地应用于物理学、化学、生物学、计算机科学、运筹学、心理学、语言学、社会学等众多的自然科学和社会科学领域。

当前，图论已经成为一门引人注目的十分活跃的学科。随着实践的发展，它的巨大潜力将会被人们进一步认识、发掘和利用。

这本小册子，通过大量日常生活和工作中的生动事实以及有趣的智力游戏，比较通俗而全面地向你介绍图论的一些基本概念、主要分支、重要定理和它们的应用。这里也将介绍图论本身的一些重大课题的突破，例如著名的“四色猜想”问题。本书的另一个意图是：尽可能地把图论和现代科学技术、主要是计算机科学的理论和实践有机地结合起来，由此体现图论方法的实用性和先进性。

本书每章的后面都附有一些练习题，其中打“*”号的题是有一定难度的，解决它们可能要花费你的一点时间，但是这也许是很有趣的事情。所有练习题的详细解答都附在书后，不过请你不要轻易地翻看它们。因为，图论毕竟是一门数学，要学习它不仅要用眼，更重要的是要动脑，要动手，只有这样，才能不仅对图论的基础知识有所了解，并且还能初步掌握图论这个有用的工具，解决日常生活、工作中的有关问题，增进自己分析问题和解决问题的能力。

当你看过这本小册子以后，如果多少能有所收益——即使是微乎其微，也将使我感到莫大的欣慰。

作　者

目　　录

一　欢乐的春节联欢会

——图的基本概念

除夕之夜，雄伟壮丽的人民大会堂灯火辉煌。东大厅里，灿灿的华灯下面，一只欢叫的孔雀展开绚丽的尾屏，迎接前来参加春节联欢会的首都各界人士。巨大的花篮，百花吐艳，凤蝶翩翩飞舞其间，这一切更增添了晚会的丰采。

游艺厅里，热闹非凡，人们正在玩贴鼻子、光控机器人等，笑声、欢叫声在大厅里回旋。如果你有幸来到这里，一定会被这节日的欢乐气氛感染，也融化到笑的海洋里去。然而，如果你未能遇到这个难逢的机会，也不必因此感到懊丧，或许还能找到一个补救的办法，它也能使你节日过得充实、愉快——让我来给你出一道有关联欢会的有趣的问题吧！

一个关于联欢会的问题

参加联欢会的人这么多，一定有不少人是彼此认识的。假设参加联欢会的人共有28769个，而每个人在联欢会上都至少遇到了1个熟人，那么，你能证明其中必有1个人至少遇到了2个熟人吗？

这里的"至少"，是不少于的意思，也就是数学中的"大于或等于"。例如，说某数a至少是2，也就是指$a \geq 2$。

这个问题也许一下子会把你给问住。不过别着急，让我

们拿出笔和纸，一起来分析一下吧。

问题里假设参加联欢会的人共有28769个，这个数目似乎大了点，我们先把它缩小些，只取它的零头9。这样，问题就可以作如下的简化："某小型游艺会有9个人参加。已知他们每个人至少认识其中的1个人。证明：必有1个人至少认识其中的2个人。"

图解这个问题

让我们通过作一个图，来一步步求得这个问题的解决。

先在纸上画出9个空心（或实心）点，这些点用图论的术语就叫做图的"顶点"。每个顶点表示参加联欢会的一个人。再给9个顶点分别标上符号a、b、c、d、e、f、g、h、i，相应地表示9个不同的人，如图1(a)所示。

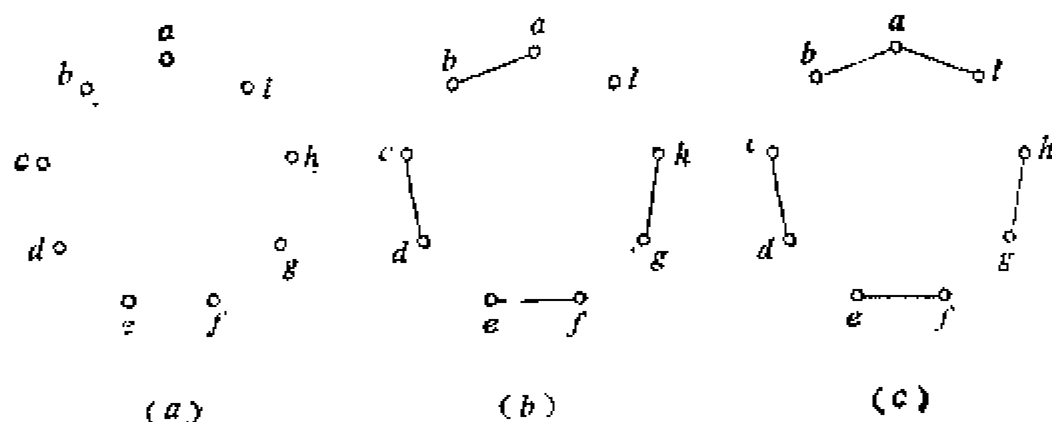


图 1

怎样表示两个人彼此认识呢？如果两个人彼此认识，那就在表示这两个人的两个顶点之间连上一条线，这条线用图论的术语就叫做"边"。已知9个人中，每个人都至少认识其中的1个人，所以9个顶点中的每一个都至少要连上一条边。我们先从顶点a开始做起。由于题里并没有明确指出a到底跟谁认识，只知道a至少跟b到i中的一个人认识，所

以，不失一般性，我们不妨假设 a 至少认识 b，这样，在顶点 a 和 b 之间可以连上一条边。同样道理，我们可以假设 c、e、g 至少分别认识 d、f、h，于是在顶点 c 和 d 之间、e 和 f 之间、g 和 h 之间都可以连上一条边，如图1(*b*)所示。这时，还没有出现和2条边相连的顶点，可是你别忘了，顶点 i 还没连边呢！

根据题设，i 也至少认识 a 到 h 中间的一个人，也就是说，在顶点 i 和顶点 a 到 h 之间也至少存在一条边。这时，不论这条边连到 a 到 h 之间的哪个顶点上，都会使这个顶点和2条边相连。比如，我们不妨设 i 和 a 认识，这样，顶点 a 就和顶点 b、i 都有边相连了。这就说明 a 至少和2个人——b 和 i 都认识，于是整个问题得以证明，如图1(*c*)所示。

那么，我原来提出的问题又怎样解答呢？方法和解决简化了的问题是一样的。对于参加联欢会的28769个人来说，先假设其中的28768个人之中的每个人只认识其他28767个人中的一个，这样可以把他们分成14384组，每组两个人彼此认识。而对于剩下来的一个人，他至少和28768个人中的一个认识，比如和其中的甲认识。而甲在前面分组中已经表明他和一个人认识。现在甲又和剩下来的这个人认识，因此，甲就是我们所要找的那个人——他至少认识其他28768个人中的2个人。

原来一个似乎很难理出头绪来的问题就这样解决了。我们应该感谢图，是它帮了忙。

图的基本概念

那么，到底什么是我们所说的图呢？在这里，我们先给

出图的一些基本概念。

在解决联欢会问题的过程中，我们已经看到，图是由顶点和边组成的。图的每条边恰好连接两个顶点，用图论的术语说，就是这条边“关联”这两个顶点。如果一条边关联顶点 a，b，我们就用（a，b）表示这条边，并且说“顶点”a 和 b 是“相邻”的。如果两条边有一个公共顶点，那么我们就说这两条“边”也是“相邻”的，比如图1(c)上的边（a，b）和（a，i）就是相邻的边，因为它们有一个公共的顶点 a。

图的顶点一般是有限个，它可以表示求解问题里的人或物或某种状态。图的边一般也是有限条，它表示顶点间的某种关系。例如，在联欢会的问题里，图上的边就表示两个人之间的“认识”关系。如果两个人彼此认识，就在他们相应的顶点间连上一条边，如果两个人不认识，那么他们对应的两顶点间就不存在边。当然，实际问题里的关系是多种多样的，要对具体问题进行具体分析，才能确定图上的边所表示的到底是什么样的关系。

根据边的不同特点，可以把图分成一些不同的类型。

如果一条边只关联同一个顶点，就是说在一个顶点上形成一个圈，那么这样的边就叫做“环”。有的图上，两个顶点之间关联的边多于一条，那么这些边就叫做“平行边”，具有平行边的图就叫做“多重图”。既没有环、又没有平行边的图，就叫做“简单图”。

图2(a)有3条环；图2(b)有2组平行边，因此它是个多重图；图2(c)既没有环，也没有平行边，因此是个简单图。这里，图2(a)既不是多重图，也不是简单图，而是个一般意义上的图。

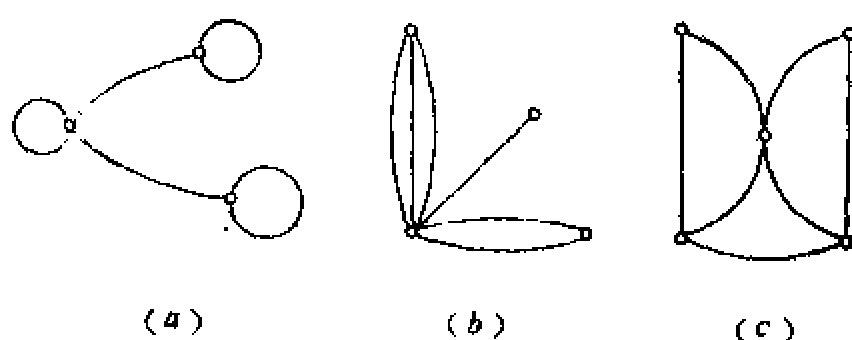


图 2

这里我们还要提到两个概念："顶点的度数"和"图的总度数"。顶点的度数是指顶点关联的边的条数。由于一条边总是关联 2 个顶点，因此一条边一定对应 2 度。这样，如果图上有 m 条边，它就一定对应图上所有顶点的度数的总和是 $2m$ 度，这就叫图的总度数，常用符号 d 表示。可知任何一个图的总度数 d 总等于图的边数的 2 倍，有关系式 $d=2m$。

也有的图只由孤立的顶点组成，没有边相连，这样的图叫做"零图"。

图 论 世 界

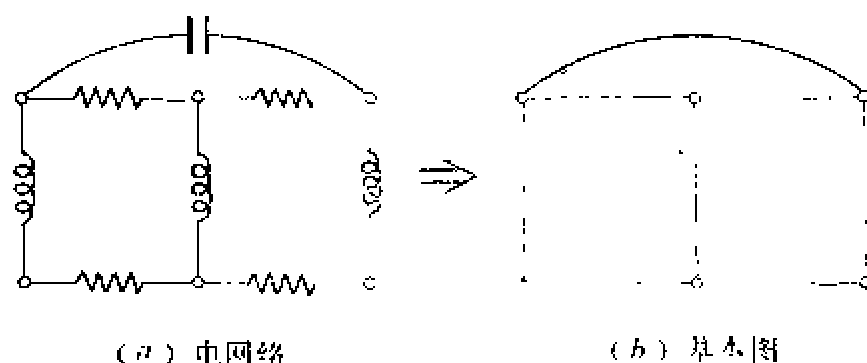
由图的基本概念我们可以看出：图论里的图只包含顶点和边，而和其他的几何要素，例如"形状"、"大小"、"面积"、"体积"等，是无关的。因此，图论里的图，是一种更加抽象的图，然而，它的应用领域却是极其广阔的。

在电网络理论中，最早由德国物理学家基尔霍夫(1824~1887)于1847年把一个电网络抽象成对应的"基本图"来研究，如图 3 所示。在这基础上逐步形成了"网络图论"。

在有机化学的研究中，1857 年，英国数学家凯莱(1821-1895) 用图论里"树"的概念①，得到了一组饱和碳氢

① "树"的概念在后面第十章里将要讲到。

化合物 C_nH_{2n+2} 和它们的同分异构物的结构式，如图 4



(a) 电网络　　(b) 基本图

图 3

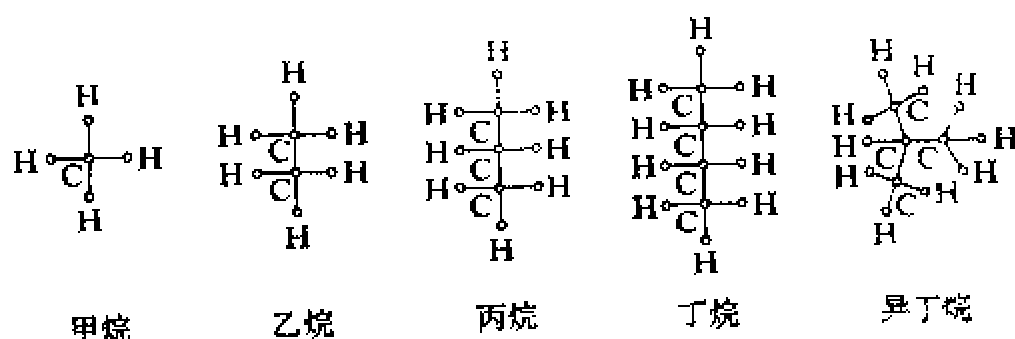
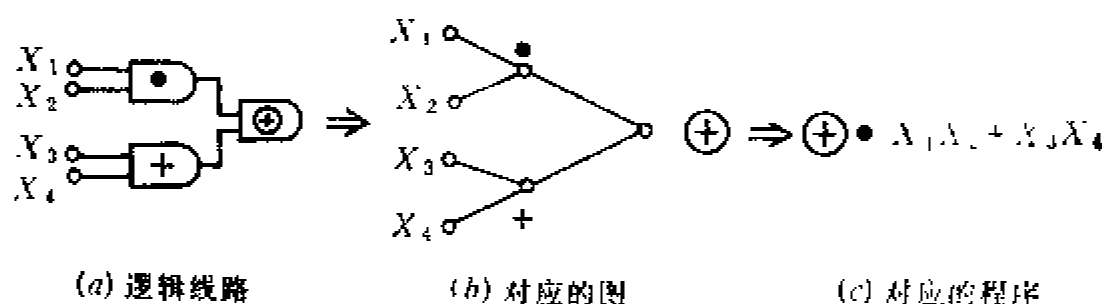


图 4

所示，把图论引进了现代化学领域。

在计算机科学中，图的应用也十分广泛。例如，一个逻辑线路，如图 5(a)①，可以抽象成一个图，如图 5(b)。由这个图，按照一定的法则，我们可以得到对应逻辑线路的一个表达式，这个表达式我们又可以把它作为一个程序输入到



(a) 逻辑线路　　(b) 对应的图　　(c) 对应的程序

图 5

① 关于这个逻辑线路，后面第十章第 69—73 页还要讲到。

计算机里，如图 5(c)所示。

图不仅应用在自然科学领域里，而且也广泛地应用在社会科学领域里。

在语言学中，可以利用图来分析语句结构。例如图 6 表示的是这样一种判断：当一个句子的结构是“名词 + 动词 + 形容词 + 名词”的时候，是合乎要求的句子，我们把这样的句子叫做合式，否则就是非合式。这样，语句“姑娘穿着花裙子”就是合式，而“姑娘穿着裙子”或“姑娘穿着裙子跳舞”就是非合式。

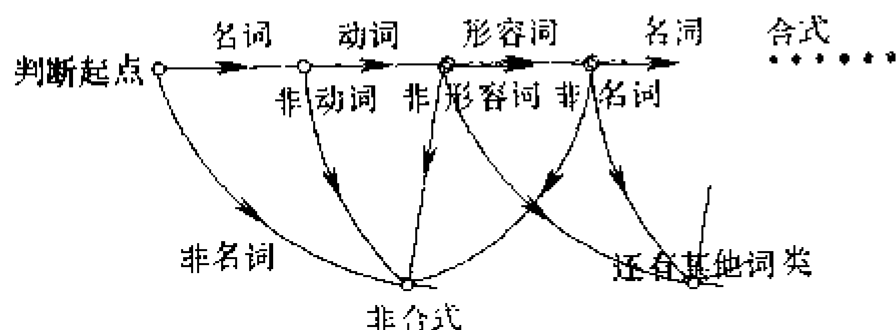


图 6

在社会学或心理学中，也有人利用图来分析一群人之间的相互关系，探讨怎样保持一个稳定的社会结构。图 7 表示的是由 3 个人组成的一个小组，边上的“+”号表示边所关联的 2 个人能很好地共事，而“−”号表示相反的情况。这样，在 4 种不同的关系组合中，图 7(a)、图 7(b)表示的是一种稳定关系，而图 7(c)、图 7(d)表示的是不稳定的关系。

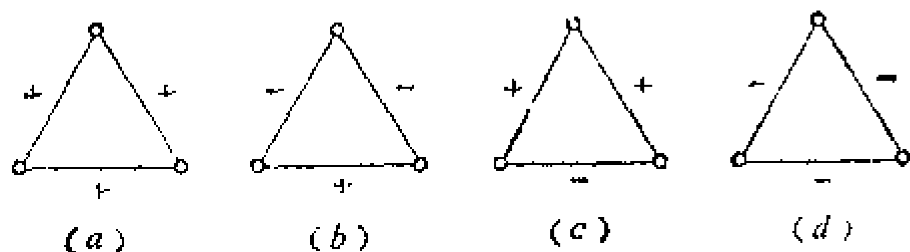


图 7

图的具体应用真是举不胜举。在广袤的科学世界里，无论你走进哪个领域，几乎都会碰到图，都会看到它作为人们的好帮手在贡献着自己的力量。愿你也能早日和图交上朋友，你将会发现：它不仅是有趣的，而且也是有用的。

练 习 一

1. 已知在5个学生甲、乙、丙、丁、戊中，甲、乙、丙是一年级一班同学，丁、戊是二年级三班同学。请就5个人之间的同学关系画出相应的图来。

2. 有A、B、C、D、E 5个城市。已知A和B、C之间，B和D之间，D和E之间有直达班机通航。请画出对应5个城市的空中交通图来（如果两个城市之间有空中通路，就在对应的顶点之间连上一条边）。

3. 判断图8各图属于哪种类型。

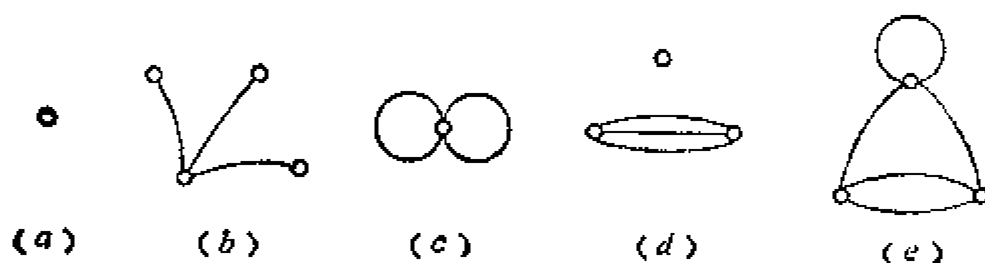


图 8

*4. 某次宴会上，熟人见面互相握手。证明：握过奇数次手的人有偶数个。

*5. 参加某次学术讨论会的共有263个人。已知每个人至少和3位与会学者讨论过问题。证明：至少有一个人和4位以上学者讨论过问题。

二　怎样走出迷宫？

——图的通路和连通性

走迷宫是个令人感兴趣的游戏。一个设计巧妙的迷宫，会给你布下难以捉摸的陷阱：在你眼看离目的地不远的时候，却又让你碰壁而归。而在你“山重水复疑无路”的时候，却又让你发现“柳暗花明又一村”。

汉普顿公园的迷宫

图 9 画的是一个供人娱乐的迷宫，现在它保存在英国伦敦汉普顿公园里。

图上黑线表示篱笆，白的空隙表示通路。图中央Q处有两根高柱，下面有椅子，可供游人休息。A是迷宫的进口。

你将怎样从A走到Q呢？

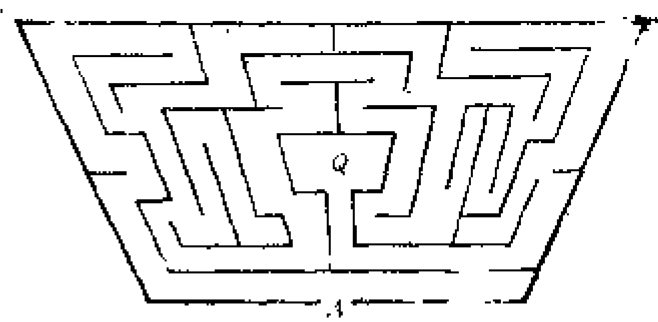


图 9

盲目地“碰”

你也许会和大多数人一样，采取一种“碰”的方法，就

是说从A进入迷宫以后，沿着图上的叉路随意走，碰到死胡同就返回来，另选一条路走下去，直到走进Q为止。

采用这种"碰"的方法，当然最后也总能"碰"出一条从A到Q的路来，但是，这种走法盲目性很大。盲目地走，往往要走进死胡同，一次成功的机会很少。而且，迷宫越是复杂，碰壁的次数可能就越多，走起来就越费劲。

有没有一种方法，使你不碰壁，从A一次成功地走到Q呢？

回答是："有！"

作图找一条通路

我们给图9中迷宫的各"路口"（道路分叉的地方）和"死角"顺序标上数字1、2、…、14，如图10所示。然后，再画出对应迷宫的一个图，如图11，它有16个顶

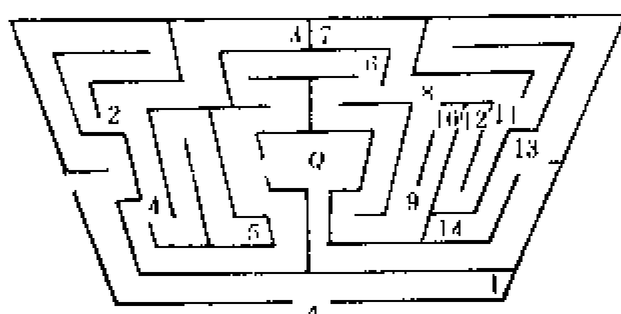


图 10

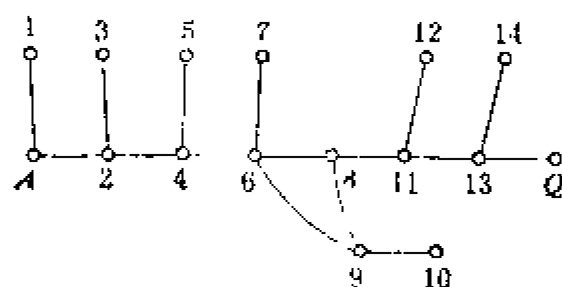


图 11

点，其中顶点A、Q分别对应迷宫的大门和中央，而其余14个顶点分别表示迷宫的7个路口和7个死角。然后，根据迷宫的构造，在能直接到达的（不经过其他的路口就可以到达的）两路口之间，或者路口和死角之间，各连上一条边。

从图11我们可以很清楚地看到：在A到Q之间，存在一条顺序经过路口2、4、6、8、11、13的通路，这条路就是从A走到Q的最直接的通路。顶点1、3、5、7、10、12、14对应着迷宫的死角，我们根据图11选择迷宫的最近通路的时候，是不会去光顾这些死角的。但是，我们从图上也可以看出，即使走进了死角，只要按原路返回到出发的路口，再从另一个叉道走下去，也总能走到Q点，当然，这样的路就不是从A到Q的最近通路了。

图的连通性

在图11上从A点能走到Q点，是因为顶点A和Q之间存在通路。通路就是一系列边的顺序排列，它们首尾衔接，就是说前一条边的终点同时是后一条边的起点。例如，边的序列(A，2)、(2，4)、(4，6)、(6，8)、(8,11)、(11，13)、(13，Q)就组成了A、Q之间的一条通路。通路中第一条边的起点就是整个通路的“起点”，例如A点。通路中最后一条边的终点就是整个通路的“终点”，例如Q点。两顶点之间的通路，有时我们也可以用通路上的边顺序经过的顶点序列来表示。例如，上面的通路我们就可以用顶点序列（A，2，4，6，8，11，13，Q）来表示。

所谓两顶点间通路的“长度”，我们是指这条通路上所经过的边的条数。例如，通路（A，2，4，6，8，11，

13，Q）的长度是7。而通路（A，1，A，2，4，6，8，11，13，Q）的长度是9，因为它闯进了死角1，把边（A，1），（1，A）各走了一次，因而比前一条通路长2。

如果一个图里任意两个不同的顶点之间都存在通路，那么，我们说这个图是个"连通的图"，例如图11。然而，如果一个图里有两个顶点之间没有通路，那么，我们说这个图是"不连通的图"，例如图12。在这个图里，由于顶点I和J与其他各顶点之间没有通路，所以这个图是不连通的图。但是这个图有两个连通的部分，我们把这种连通的部分叫做原图的一个"连通支"。在图12里，由顶点A、B、C、D、E、F、G、H以及它们之间关联的边组成了一个连通支，而另一个连通支由顶点I、J和边（I，J）组成。当然，对于一个连通的图来说，它只有一个连通支。

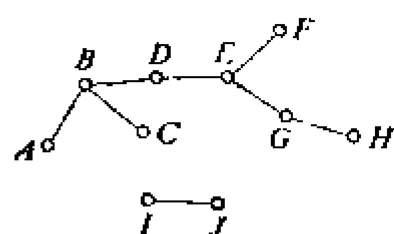


图 12

在一个图里，有时同一对顶点之间的通路不止一条。例如图13，顶点C、I之间有两条通路，它们是（C、D、E、F、I）和（C、G、H、I）。这样，如果把这两条通路在I点合在一起，而以C点作为起点，就可以形成一条从C点出发又回到C点的通路（C、D、E、F、I、H、G、C）。这样一种起点和终点重合的通路，就叫做"回路"。在同一条回路上的各顶点都可以作为这条回路的起点和终点，并且，去掉回路上任何一

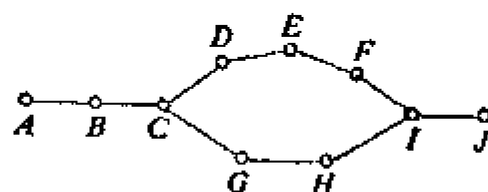


图 13

条边，都不会影响回路上各顶点的连通性，也不会影响整个图的连通性。例如从图 13 上去掉边（D、E），如图 14(a)所示，或者去掉边（H、I），如图 14（b）所示，图仍然是连通的。这就好象一条大河上有两座桥，如果其中一座桥倒塌了，还可以沿着另一座桥到达彼岸。

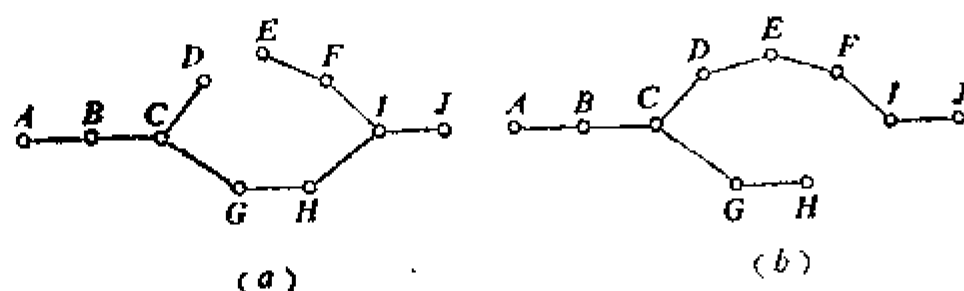


图 14

没有边重复出现的通路叫做“简单通路”，而没有边重复出现的回路叫做“简单回路”。例如图 13 里：（C、D、E、F、I、H）是一条简单通路，而（C、D、E、F、I、J、I、H）就不是一条简单通路；（C、D、E、F、I、H、G、C）是一条简单回路，而（C、D、E、F、I、J、I、H、G、C）就不是一条简单回路。

练 习 二

1. 如图 15 所示。用顶点的序列写出从 A 点到达 J 点的两条不同通路。这两条通路的长度各是多少？

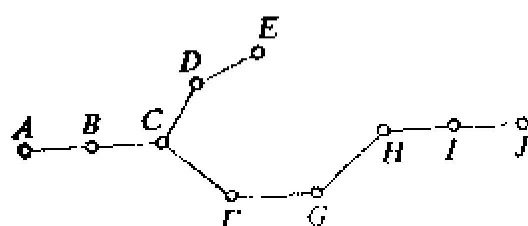


图 15

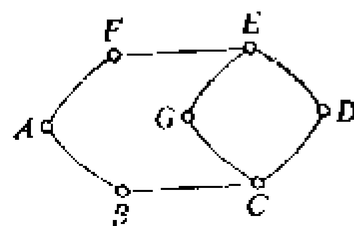


图 16

2. 图 16 上有几条不同的简单回路？分别用顶点的序列写出来。它们各自的长度是多少？

3. 图 17 表示的是一个迷宫，A是进口，B、C是出口。试用作图的方法判断从A是否能走到B或C？如果能走到，用顶点的序列写出以A作为起点，以B（或C）作为终点的一条最近的通路。对应迷宫的图是不是连通图？有几个连通支？

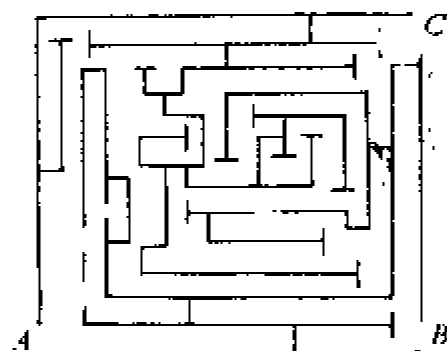


图 17

三　一笔画的奥妙

——欧勒通路和回路

“一笔画”，望文生义，就是指能一笔画出的一个图，也就是说笔不离纸能一次把它画出来，图上的每条边都要画到而又不准重复。

哪些图是一笔画？

什么样的图能一笔画出呢？为了说明这个问题，我们先看看图18上的几个图。

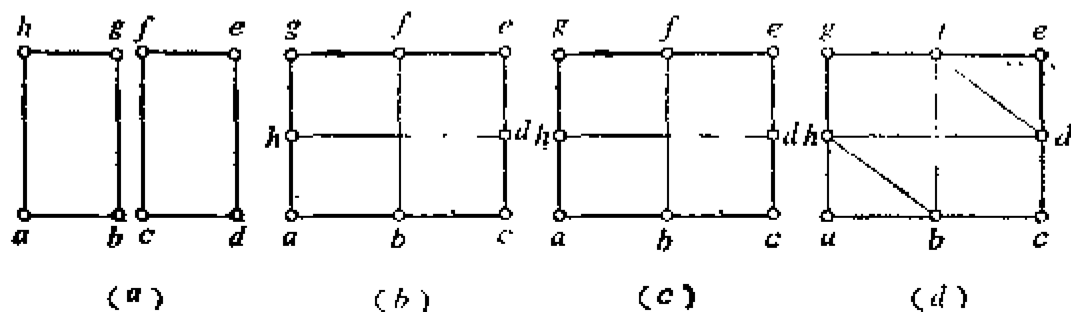


图 18

图18(*a*)由于分成了两部分，是个不连通的图，显然不能一笔画出。图18(*b*)虽然是个连通的图，但是你经过反复试画后，会发现无论怎样画也无法把它一笔画出来。再看图18(*c*)，这也是个连通图。你试着画画后会发现：只有从顶点h或b开始画起，才能把这个图一笔画出，并且终点一

定是 b 或 h，也就是说，这个一笔画的起点和终点是固定的，并且不重合。最后再看图 18(d)。你无论从它的哪个顶点开始画起，都能把它一笔画出，并且最终一定会回到开始画的那个点。

图 18 上的 4 个图的顶点个数是相同的，但是，为什么有的是一笔画，有的就不是一笔画？为什么有的一笔画起点受到限制，而有的一笔画起点就不受限制呢？

仔细观察一下这 4 个图，就会发现：是不是一笔画和顶点的个数无关，而是和顶点的度数以及图的连通性有关。

前面我们已经提到过，所谓一个顶点的度数就是这个顶点所关联的边的条数。例如图 18(b)里顶点 a、c、e、g 的度数都是 2，顶点 b、d、f、g 的度数都是 3；图 18(c)里，顶点 a、c、e、g 的度数都是 2，顶点 b、h 的度数都是 3，顶点 d、f 的度数都是 4；图 18(d)里，顶点 a、c、e、g 的度数都是 2，顶点 b、d、f、h 的度数都是 4。

图 18(b)、(c)、(d)都是连通的。它们顶点的度数有什么不同呢？图18(b)里度数是偶数的顶点是 4 个，是奇数的顶点也是 4 个；图18(c)里度数是偶数的顶点是 6 个，是奇数的顶点是 2 个——h 和 b，它们的度数各是 3；而图 18(d)里各点的度数都是偶数，或者说，它的度数是奇数的顶点是 0 个。

比较上面三图的不同，联系到它们是不是一笔画，我们可以得出构成一笔画的条件：首先这是一个连通的图。其次，凡是度数是奇数的顶点是 0 个的图，可以一笔画出，而且从任一个顶点开始都行；凡是度数是奇数的顶点是 2 个的图，也可以一笔画出，它的起点和终点就是度数是奇数的那

两个顶点。图 18(*b*)和图18(*a*)都不同时具备这些条件。图 18(*b*)虽然是连通的图，但是度数是奇数的顶点有 4 个而不是 0 个或 2 个；图 18(*a*)虽然各顶点的度数都是偶数，但是他是不连通的图。因此，这两个图都不是一笔画。

为什么一笔画要具备这些条件呢？必须是连通的图，这个道理是不说也明白的。至于顶点的度数必须全是偶数或只有两个顶点的度数是奇数，是因为我们如果从某一点出发，一笔画出了某个图形，到某一点终止，那么中间每经过一点，总有画进那点去的一条线和从那点画出来的一条线，就是那点一定要和偶数条线相联；除非是起点和终点，这两点允许有奇数条线和它们相连。因此，如果图上只有 2 个顶点的度数是奇数，也能一笔画出，但是画的时候只能以这两点作为起点和终点。

欧勒定理

一笔画不仅是个有趣的图画游戏，还是图论研究的重要内容之一呢！判断一个图是不是一笔画，用图论的语言来说，就是判断这个图是否存在着一条"欧勒通路"或"欧勒回路"。

一个图具有欧勒通路，是指这个图里存在这样一条通路：它经过图的每条边一次，并且只经过一次。如果这条通路的起点和终点重合，那么，就把它叫欧勒回路。这样，如果一个图具有一条欧勒通路或回路，它必然是一笔画，否则就一定不是。图 18 里，由于图 18（*c*）存在一条以 *h* 或 *b* 作为起点、以 *b* 或 *h* 作为终点的欧勒通路，图 18（*d*）存在以任意顶点作为起点和终点的欧勒回路，所以，它们都是一笔画。而图 18（*a*）和图 18(*b*)，既不存在欧勒回路，

也不存在欧勒通路，所以，它们都不是一笔画。

到底根据什么来判断一个图是否存在着欧勒通路或欧勒回路呢？这正是大数学家欧勒在二百多年前考虑过的问题，采用图论的方法，他对这个问题作出了圆满的解答。为了记念欧勒，人们把他在这个问题上取得的成果叫做“欧勒定理”。这个定理其实就是我们上一节分析一笔画的时候已经得出的条件。

欧勒定理说：一个图具有欧勒通路或回路的充分必要条件是：它是连通的，并且它的奇数度数的顶点有0个或2个。当它的奇数度数的顶点有0个，就是说它的顶点度数都是偶数的时候，它具有欧勒回路，而当它的奇数度数的顶点是2个的时候，它具有欧勒通路。

图18里的4个图，根据我们前面的分析，正好都符合欧勒定理的结论，因此，我们对这个定理是容易接受的。定理把一笔画问题处理得十分干脆利落，完美透彻。无论多么复杂的图，用欧勒定理来判断它是不是一笔画，都会迎刃而解。

一个图如果有一条欧勒回路，就叫做“欧勒图”。图18(d)就是一个欧勒图。

一笔画处处有

如果以为一笔画只存在于图画游戏中，那真是天大的误会。实际上，现实生活中可以转化成为一笔画的问题几乎处处都有。例如，假期你来到了某个从未到过的城市，总希望有机会能把城市里的几条最繁华的街道都逛上一遍而不走重复的路。或者某个星期天，你来到一个幽静的公园，见到那明镜般的湖面上分布着几个小岛，湖岸和它们之间有几座玲

珑的小桥，你也许会游兴大发，想试试能否从一处出发，把湖上所有的小桥都不重复地走过一遍后回到原出发地？日常工作中，邮递员投递信件，洒水车给街道洒水，怎样才能走不重复的路，都存在个一笔画的问题，这些，都涉及到欧勒定理的应用。

我们下面再举两个有趣的例子，说明怎样灵活地应用欧勒定理。

地面上有如图 19 所示的一个图，甲、乙两只蚂蚁分别处在图上 a 、 b 顶点处。蚂蚁甲对蚂蚁乙说："咱们俩比赛，看谁先把这个图的 9 条边都爬过一遍后到达顶点 e ？"蚂蚁乙欣然同意。

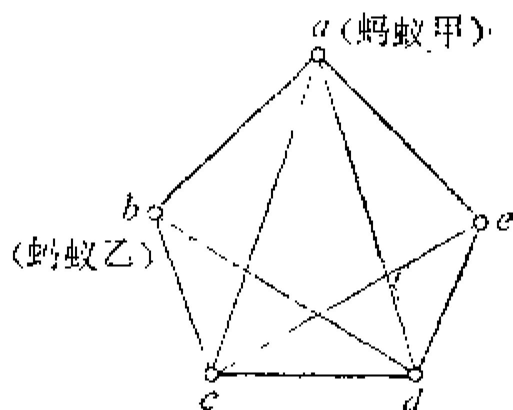


图 19

假设两只蚂蚁的速度是一样的。请问：最后的结果将是怎样的呢？

我们先来看看图 19 是不是一笔画。由于图 19 是连通的，并且恰好有 2 个顶点的度数是奇数，所以，根据欧勒定理，图 19 存在一条欧勒通路。

再看看从顶点 a 和 b 出发，是不是都能把图 19 一笔画成？由于顶点 b 的度数是奇数，因此可以从这一点出发，正好把图上各条边都走过一遍后到达另一个奇数度数的顶点 e 。然而对于顶点 a 来说，由它的度数是偶数，以它作为起点是无论如何也不能把图一笔画成而后到达顶点 e 的。从 a 点出发，又要把图的每条边都走到，必须要重复经过一条或几条边才行，如果蚂蚁甲懂得欧勒定理，它就先从 a 点爬到 b 点，然后再爬遍 9 条边到达 e 点。这样，蚂蚁甲走到 e 点的总路

程必然要比蚂蚁乙的长 a b 这一段。而它们俩的速度既然是一样的，所以，先到达 e 点的一定是蚂蚁乙，而不是提出挑战的蚂蚁甲。

从这个问题我们可以看出：对于有 2 个奇数度数顶点的连通图来说，能否把它一笔画出，关键是要找对起点，而这个起点只能是一个奇数度数的顶点。

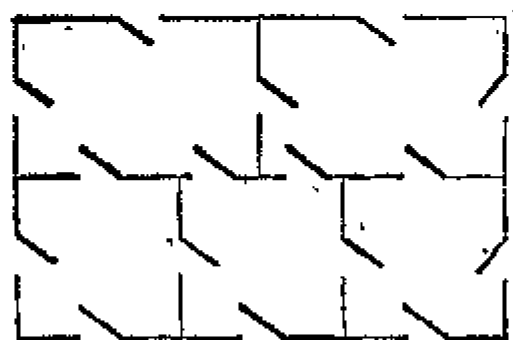


图 20

图20表示的是一个展览馆的平面图。馆里各相邻房间之间，以及各房间和馆外空地之间，都开有门，这种门一共开了16扇，真可谓四通八达了。一个参观者来到展览馆门外，他想在参观过程中把馆里所有的门都不重复地穿行一遍。这个想法能否实现？

这个问题乍看起来，好象和一笔画的关系不那么明显，这是因为图 20 所给出的是一个展览馆，而不是一个只有顶点和边的图。但是，我们可以根据所学过的知识把这个展览馆转化成为相应的图。方法是这样的：先把馆里的 5 个房间和馆外的空地分别标上字母A、B、C、D、E、F，如图 21 所示。然后，我们再画这样一个图：它有 6 个顶点，对应A、B、C、D、E、F 6 块地方，它的边这样确定：当展览馆 2 个房间之间或房间和馆外空地之间有一扇门的时候，就在它们对应的顶点之间连一条边，这样，我们就得到了图 22，它共有 16 条边，正好对应展览馆的 16 扇门。于是，判断能否不重复地穿过展览馆每扇门一次的问题，就变成判断能否连续地经过图22里每条边一次并且仅仅一次的问

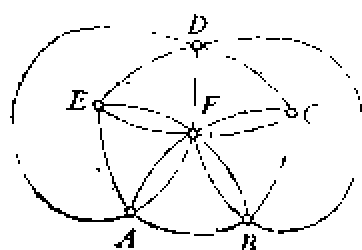


图 22

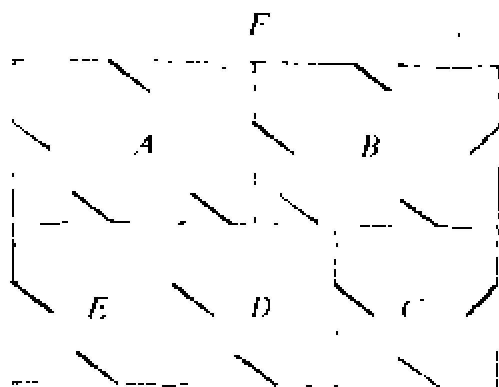


图 21

题了，这样，原来的问题就变成判断图 22 是不是一笔画的问题了。图 22 里，奇数度数的顶点有A、B、D、F 4 个，因此根据欧勒定理，图22是不能一笔画成的，由此推出参观者原来的设想是不能实现的。

如果要实现原来的设想，只有重新设计门才行。方法可以是多种多样的，而目的只有一个，就是要把图 22 里具有奇数度数顶点的个数减少到 2 个或 0 个。例如，去掉D和F之间的一扇门或者在A、B之间再加上一扇门，都是可以的。

练 习 三

1． 判断图 23 中各图能否一笔画出。

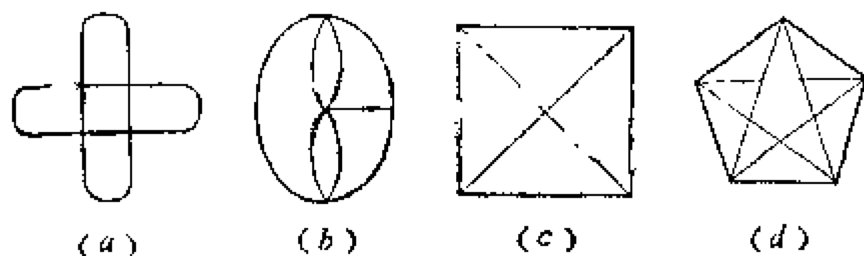


图 23

2． 公园里有图24所示的一个花圃。园丁给花浇水，他想一次浇完整个花圃，并且每排花只经过一次。问他的打算

能否实现？（图 24 里每条边表示一排花）

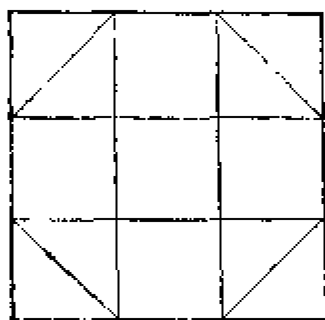


图 24

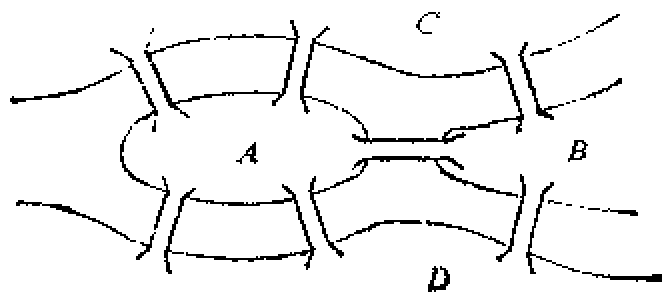


图 25

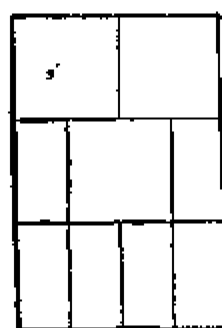
3. 哥尼斯堡七桥问题是这样的：

如图 25 所示，古代哥尼斯堡的普莱格尔河里有一个岛 A。在这个岛和 3 块陆地 B、C、D 之间共有 7 座桥。当地的居民热衷于解这样一个难题：能否从某处出发，把这七座桥都走到并且每座桥只走过一次？你能找到这种走法吗？

*4. 能否找到一条折线，它正好穿过图 26(*a*)的各条边一次并且仅仅一次？对于图 26(*b*)能否找到这样的一条折线？



(*a*)



(*b*)

图 26

四　十大城市间的微波中继干线

——完全图和它的应用

随着广播电视事业的飞速发展，各大、中城市都纷纷设立了电视发送台，并且在某些大城市之间还建立了微波中继干线，用来传送彼此的电视节目。

有多少条微波中继线？

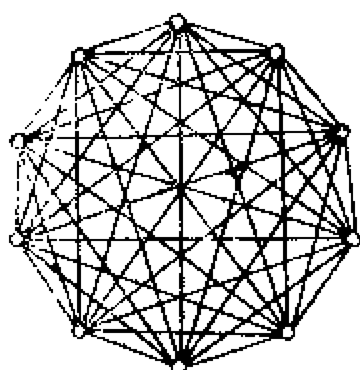
现在有这样一个问题：如果在10个大城市中的每2个城市之间都要建立一条微波中继干线，那么，一共要建立多少条微波中继干线呢？

如果你学过排列组合的知识，那么就可以直接应用组合计算公式$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$来计算，把n用10代入，于是得到

$$C_{10}^2=\frac{10(10-1)}{2}=45,$$

因此答案是：45条。

如果你没学过排列组合的知识，也不要紧，我们可以利用图来解这个问题，如图27。令10个顶点对应10个大城市，每2个顶点之间的一条边对应2个城市间的一条微波中继干线。根据题设，由于每个城市和其他9个城市间都有微波中继干线，所以图上每个顶点都关联9条边。数数图上边


图 27

的条数，恰好也是45。

在这里，用作图的方法求解并不一定是最简单的。我们作这个图的目的，主要是想借此向你介绍一种特殊的图："完全图"。完全图是指图上任意2顶点之间都有一条边、并且只有一条边相关联的图。图27就是一个有10个顶点的完全图。

一个有n个顶点的完全图可以用符号K_n表示。它的总边数，可以用组合公式

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$$

来计算，只要把具体顶点数n代入就行了。当然，我们也可以根据已知的完全图的总边数反过来求它的顶点个数，这里就不赘述了。

然而，我们提出完全图，并不仅仅是为了计算它的边数，否则，用公式计算就行了，何必还要作图呢？我们提出完全图，是因为它有许多独特而有趣的应用，不愧是"图论"这个大聚宝箱里一把金光闪闪的小改锥。

完全图和一笔画

我们先看看完全图和一笔画的关系，看看一个图如果是个完全图的话，能否更快地判断出它是不是一笔画。

举这样一个例子：一位邮递员负责的送信区域正好有5个街口a、b、c、d、e，每2个街口之间都有一条街，邮局就设在街口a处，如图28所示。现在要问，邮递员从

邮局出发，能否把所有的街道都走过一遍，并且只走过一遍，然后回到邮局？

很明显，图28是个有5个顶点的完全图K_5，由于它每个顶点的度数都是4，根据欧勒定理，图28是个起点和终点重合的一笔画。因此，这个邮递员是可以在每条街都走过一遍后回到邮局的。

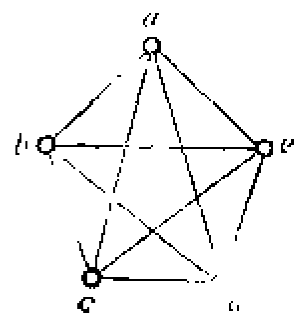


图 28

从上面所举的例子可以发现这样一条规律：完全图每个顶点的度数正好等于它的顶点总数减去1。因此，当一个完全图的顶点个数是偶数的时候，它每个顶点的度数一定是奇数。反过来，当它的顶点个数是奇数的时候，它每个顶点的度数一定是偶数。根据完全图这个特点，再结合欧勒定理，我们可以推导出下面的结论：

第一，如果一个完全图K_n有奇数个顶点（$n \geqslant 3$），那么它一定有一条欧勒回路。

第二，如果一个完全图K_n有偶数个顶点（$n \geqslant 4$），那么它一定没有欧勒通路或回路。

根据这两点结论，我们可以很迅速地判断出：有347个顶点的完全图一定是一笔画，而有1286个顶点的完全图一定不能一笔画出。

红色K_3或蓝色K_3

完全图最有趣的应用，是在下面这样一类问题上。

给一个K_6的各边涂上红色或蓝色，证明：对于任何一种随意的涂法，在K_6里总是或者有一个红色的K_3或者有一个蓝色的K_3。

我们现在来证明这个问题。

设 K_6 的顶点分别是 a、b、c、d、e、f。在 K_6 里每个顶点都关联 5 条边，而根据题设，这 5 条边只能涂红色或蓝色，因此，其中总是至少有 3 条边涂同一种颜色。不失一般性，我们不妨设在顶点 a 关联的 5 条边中有 3 条边涂红色，并且设这 3 条边关联到顶点 b、c、d，如图29(a)所示。在图29中，我们用实线表示红色，用虚线表示蓝色。

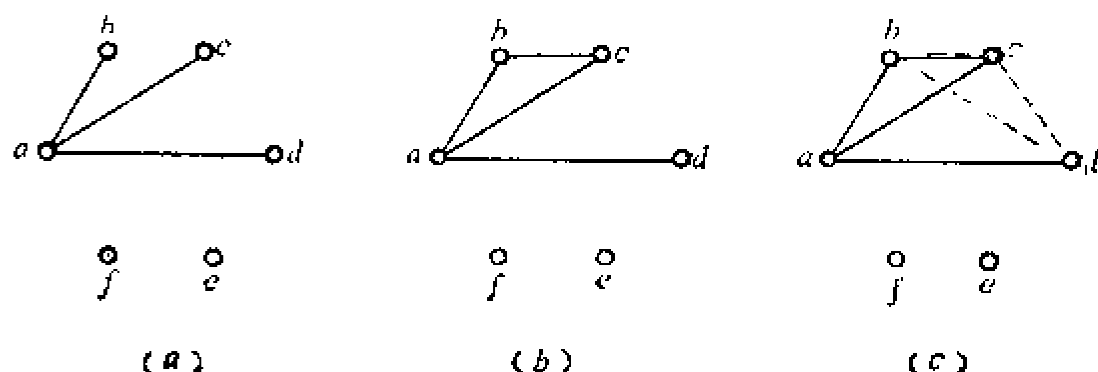


图 29

现在，再来看看顶点 b、c、d 之间的边的颜色。由于 K_6 是完全图，所以 b、c、d 3 个顶点之间必然存在 3 条边：(b，c)，(c，d)，(b，d)。在这 3 条边中，只要有一条边涂上红色，比如边(b，c)涂上了红色，那么(b，c)边和原来已经涂上红色的(a，b)，(a，c)2 条边合在一起，就组成了一个红色的 K_3，如图 29(b)所示。如果在(b，c)，(c，d)，(b，d)这 3 条边中没有一条边是红色，也就是说如果它们全都涂上了蓝色，那么，这 3 条蓝色的边就正好组成了一个蓝色的 K_3，如图 29(c)所示。因此，我们得到的结论是：无论给 K_6 的边怎样着色，总会有一个或者红色或者蓝色的 K_3。

至于 K_6 里和顶点 e、f 相关联的几条边，由于在证明

过程中没有涉及它们，就是说不论它们涂什么颜色，也不会影响到已经证明的结果，因此在图 29 中没有画出。这种省略无关紧要部分的作图方法，在图论中经常用到。

在这个问题的基础上，可以提出一个和日常生活有关的有趣问题：你能否证明：在任意的 6 个人的小组中，总是存在这种情况：或者有 3 个人彼此认识，或者有 3 个人彼此不认识。

只要你把这个问题作个转化：让 6 个人对应 K_6 的 6 个顶点，2 个人认识，就给他们对应顶点所关联的边涂上红色(实线)，两个人不认识，就给他们对应顶点所关联的边涂上蓝色(虚线)，而这种边的涂色方法是任意的。这样，整个问题就变成了证明一个 K_6 里或者有一个红色的 K_3(表示顶点对应的 3 个人彼此认识)，或者有一个蓝色的 K_3（表示顶点对应的 3 个人彼此不认识)。而这正好是我们前面已经证明了的问题。

在现实生活中，在若干个人或若干种物之间，往往存在这种“二者必居其一”的关系。例如：认识或者不认识；是朋友或者不是朋友；能配套或者不能配套；能相容或者不能相容；等等。而用完全图解决这类问题是有一定的方便的地方的。完全图的这种应用，往往深入到社会学、心理学、经济学、企业管理等社会科学领域里。

练 习 四

1. 分别画出具有 4 个顶点和 6 个顶点的完全图。

2. 判断下列各完全图是不是一笔画：K_{15}，K_{26}，K_{47}，K_{60}。

3. 在一次会议上，每位与会者都和其他参加会议的每

个人握过1次手。已知总共握手66次，你能求出有多少人参加会议吗？

*4. 给完全图K_n($n\geqslant 7$)的边涂上红色或蓝色。已知其中一个顶点至少关联6条红色的边。证明：K_n里或者存在一个红色的K_4，或者存在一个蓝色的K_3。

*5. 对于K_9的边涂上红色或蓝色。已知其中任意一个K_3里都至少含有一条红色边。证明：存在一个红色的K_4。

*6. 根据上题的结果，证明：在9个人中，如果任意3个人之间都至少有2个人彼此认识，那么一定有4个人彼此认识。

五　环游世界的路线

——哈密顿通路和回路

大如鲸鱼，小如蝙蝠；机灵如猴，笨拙如熊；凶猛如虎，胆怯如兔，这些形形色色的动物，外貌、习性的差别不可说不大，然而，追究它们的根源，竟然同宗同族，都属于哺乳动物纲，从爬行动物进化而来。这种自然界的怪事，会使一个初次听到的人感到不可思议。

类似的怪事，也存在于图论的世界里。

请你先看看下面这几个问题。

貌异质同的几个问题

一个是“环游世界”问题。

如图 30 所示，图上 20 个顶点表示世界上 20 个国家的首都，边表示城市间的水路或陆路通道。问：是否存在一条环游世界的路线，使得一位旅行者从任一城市出发，经过其他 19 个城市各 1 次后又回到原来的出发地？

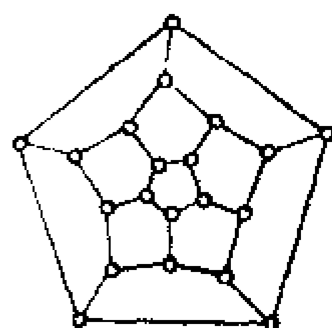


图 30

一个是联欢会上的排座位问题。

在一次国际学生联欢会上，有 7 位来自不同国家的学生会话能力如下：

a：会讲英语。

b：会讲英语和汉语。

c：会讲英语、意大利语和西班牙语。

d：会讲汉语和日语。

e：会讲德语和意大利语。

f：会讲法语、日语和西班牙语。

g：会讲法语和德语。

问：怎样安排这7个人围着一个圆桌坐下，使得每个人都能和他身边的两个人交谈？

一个是挑选双色布问题。

某工厂生产由6种不同颜色的纱织成的双色布。已知花布品种中，每种颜色至少分别和其他3种不同的颜色搭配。要求证明：可以挑出3种双色布，它们恰好含有6种不同的颜色。

一个是棋盘上跳马问题。

图31画的是半个国际象棋棋盘。问：马能否连续地把棋盘上所有的格都跳到一次并且仅仅一次？如果去掉了棋盘对角线上两个黑色方格，又将会怎样？

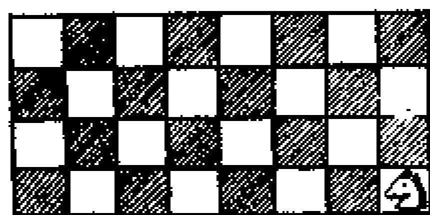


图 31

这四个问题初看起来，似乎面貌各异，彼此毫无关系。然而，我们通过进一步分析将会发现：它们的本质是相同的——它们都可以转化成为求一个图的哈密顿通路或回路的问题，只是在具体求解的过程中，采用的方法有所不同罢了。

哈密顿通路和回路

什么是哈密顿通路或回路呢？

十九世纪著名的英国数学家威廉·哈密顿（1805-1865）

爵士在 1859 年提出了一种“环游世界”的游戏，也就是上节给出的第一个问题。在这个游戏中提到了这样一种通路：它经过图上各顶点一次并且仅仅一次，那么这种通路就叫做“哈密顿通路”，当它的起点和终点重合的时候，就叫做“哈密顿回路”。

需要注意的是：哈密顿通路和欧勒通路是两种意义不同的通路。哈密顿通路强调的是图上的“各顶点”要经过一次并且仅仅一次，而欧勒通路强调的是图上“各边”要经过一次并且仅仅一次。哈密顿通路并不要求经过图的每条边，而欧勒通路却必然要经过图上的各顶点，并且允许重复经过。

有些图，如图 32(a)，有欧勒通路而没有哈密顿通路；有些图，如图 32(b)，有哈密顿通路而没有欧勒通路；当然，有的图既有欧勒通路，又有哈密顿通路，如图 32(c)，而有的图既没有欧勒通路，又没有哈密顿通路，如图 32(d)

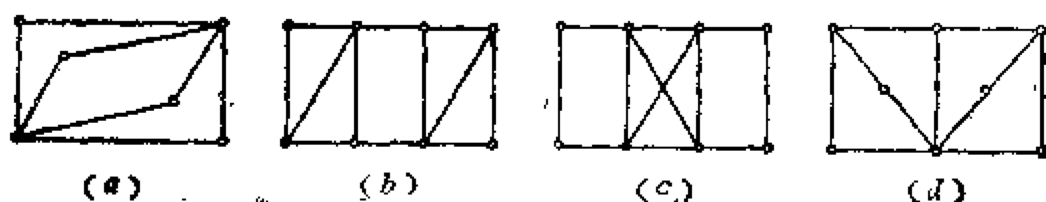


图 32

一般说来，一个图的欧勒通路和哈密顿通路（如果有的话）是不重合的，例如图 32(c)，但在一些特殊类型的图——例如多边形图里，它们是重合的，如图 33。

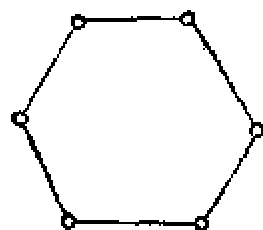


图 33

一个图是否存在哈密顿通路或回路，到现在还没找到判断它的充分必要条件，所以解决这类问题要比找一个图的欧勒通路麻烦多了。对于不同类型的问题，有不同的判断

方法。我们现在就几种主要的方法，结合前面提出的四个问题，分别作些介绍。这一章先讲一种方法。

环游路线——直接找

对于“环游世界”问题，我们采用“直接求解”的方法，也就是从图的某一个顶点开始，采用一步步试探的方法，来找出图的哈密顿通路。如果找到了一条，解就得出来了，如果找不到，就可能没有解。图 34 中粗线表示的就是一条环游世界 20 个大城市的路线，起点和终点是 a（或者其他任一顶点）。可见哈密顿提出的这个问题是有解的。

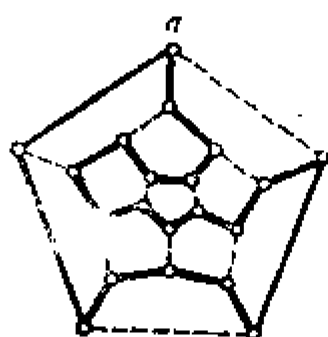


图 34

对于十分复杂的图来说，要对各种情况都作试探，尤其对于判断没有哈密顿通路的情况，是十分麻烦的事，所以，这种方法一般只用在比较简单的图上，而且多用在肯定有哈密顿通路存在的情况。

对于排座位问题，我们可以先画个图，然后也采取“直接求解”的方法。

设 7 个顶点 a、b、c、d、e、f、g 对应 7 个学生，在会同一种语言的人对应的顶点之间连上边，这样就得到了图 35(a)。于是原来的排座位问题就变成了在图 35(a)里找一条哈密顿回路的问题了。如果按回路上顶点的顺序来排座位，那么每个人和他相邻的两个人都能交谈。在图 35(b)上用粗线画出的一个回路，就是我们所求的解。也就是说，如果按照 a、b、d、f、g、e、c 的顺序排座位，每个人就都可以和他的两个邻座交谈，所采用的语言种类标明在图35(b)的对应边上。

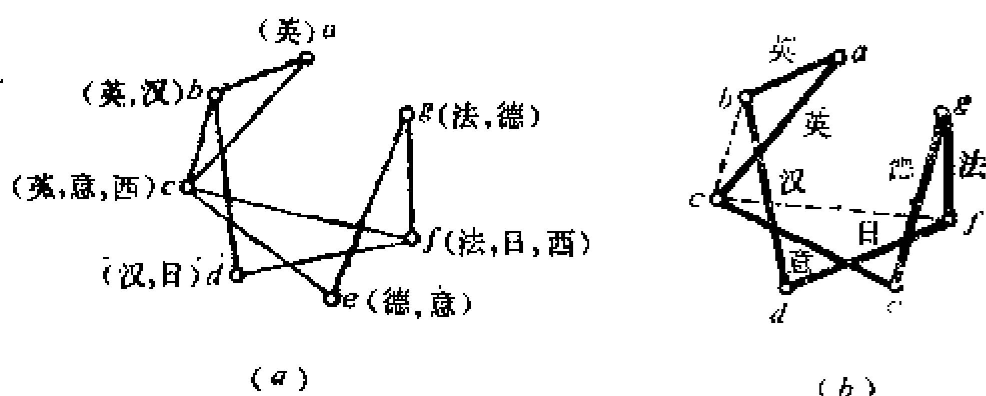


图 35

一个图如果有一条哈密顿回路，就叫做“哈密顿图”。图34、图 35 就都是哈密顿图。

练　习　五

1. 判断图36里各图哪些是欧勒图，哪些是哈密顿图？

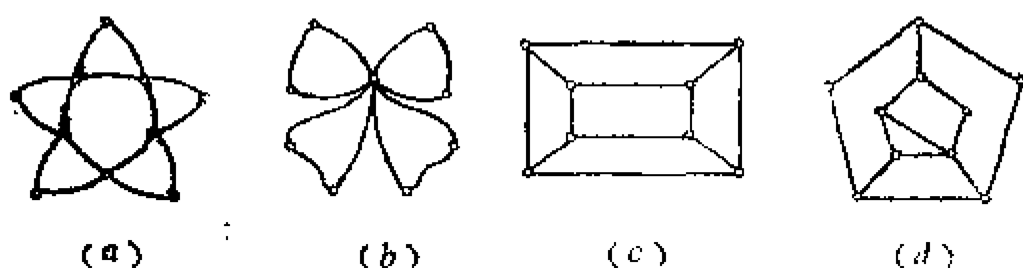


图 36

2. 在一次国际语言学家会议上，允许使用的公共语言共有 9 种。已知有 8 位语言学家要围着圆桌开会，他们每人至少会讲 9 种语言中的 5 种。问：怎样排座位，才可以使得每位语言学家都能和他的邻座交谈？这种排座位方式共有多少种？

*3. 6 个男孩和 6 个女孩拉成一个圆圈跳舞。如果要

求每个男孩和每个女孩只相邻一次（不管是在左侧还是在右侧），并且不和其他的男孩相邻，问这样的圆圈能组成多少个？

六　色彩缤纷的双色布

——哈密顿通（回）路的判断方法

两条判断定理

一个图是否存在哈密顿通路或回路，虽然还没有找到判断的充分必要条件，但是已经找到了几个判断的充分条件，它们可以表示成如下的两条定理：

第一条定理是：有 n 个顶点的图($n\geqslant 2$)，如果它的任意两个顶点度数的和大于或等于 $n-1$，那么它一定有一条哈密顿通路。

第二条定理是：有 n 个顶点的图($n\geqslant 3$)，如果它的任意两个顶点度数的和大于或等于 n，那么它一定有一条哈密顿回路。

现在我们就用这些定理来证明前面提出的挑选双色布问题，这个问题重述如下：

某工厂生产由 6 种不同颜色的纱织成的双色布。已知花布品种中，每种颜色至少分别和其他 3 种不同的颜色搭配。要求证明：可以挑出 3 种双色布，它们恰好含有 6 种不同的颜色。

我们现在把它转化成一个图论的问题。让每种颜色对应一个顶点，这样就有 6 个顶点 a、b、c、d、e、f。哪两种颜色搭配织成一种双色布，我们就在这两种颜色对应的顶点

之间连一条边。因此，在这个图里，一条边代表一种双色布，并且从这里可以推出，任何两种含有不同颜色的双色布，它们所对应的两条边没有相同的顶点。因此，要找到含有6种不同颜色的3种双色布，就变成要在图上找到3条彼此没有公共顶点的边。如果图上恰好有一条经过6个顶点各一次的哈密顿通路或回路，那么，这样3条彼此没有公共顶点的边总是存在的，如图37所示。在这个图里，3条实线边或者3条虚线边都满足这个条件。

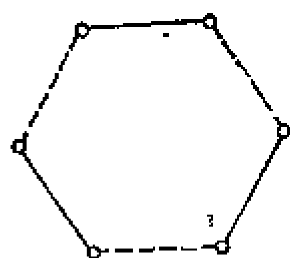


图 37

现在的问题就变成了判断原题所对应的图是否存在哈密顿通路或回路了。根据题意，每种颜色至少和其他3种颜色搭配，也就是说，图上每个顶点至少关联3条边，因此它的度数至少是3，所以，图上任意两个顶点的度数的和必然大于或等于6。根据上面给出的定理，可以断定这个图一定有一条哈密顿回路，因此包含6种不同颜色的3种双色布是一定存在的。原题的证明就是这样得出的。

需要说明一点的是：图37不是对应原题的一个完整的图，它仅仅是一个示意图。由于原题给出的各顶点关联的边数不是一个确定的数，只是说大于或等于3，因此原题所对应的图实际上是无法确切画出的。在这类问题中，一般无法用"直接求解"的方法来找出图的哈密顿通路或回路，只能采取证明的方法。另外，需要再提醒一句：这些判断定理都只是"充分条件"而不是"充要条件"，也就是说，当一个图具备这些定理所提的条件的时候，它一定有一条哈密顿通路或回路，然而，如果一个图不具备这些定理所提的条件，它也未必就没有哈密顿通路或回路。例如图38它有8个顶点，而

每两顶点的度数的和只有4，它并不具备两条判断定理中任何一条的条件，但是它还是具有一条哈密顿回路。

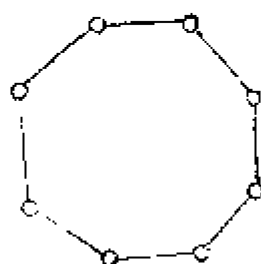


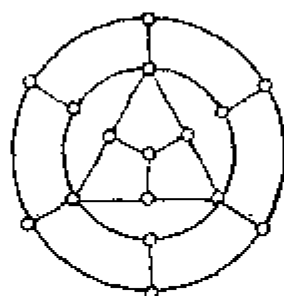
图 38

马跳日——交错标记法

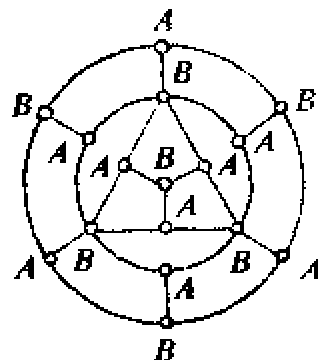
对于一种特殊类型的问题，我们也将采用一种特殊的方法——"交错标记法"来判断它是否有哈密顿通路或回路。先举个例子来说明这种方法的应用。

判断图 39(*a*)是否具有哈密顿通路。

我们给图上的某一个顶点，例如最上面的一个顶点标记上*A*，然后给和它相邻的各顶点标记上*B*，接着再给和标记着*B*的顶点相邻的各顶点标记上*A*，……依此类推，直到图上所有的顶点都标记上*A*或*B*为止，如图 39(*b*)所示。



(*a*)



(*b*)

图 39

由于图 39(*b*)上的 16 个顶点交错标记了*A*和*B*，所以，如果图上存在一条哈密顿通路的话，它必然要交错地走过顶点*A*和顶点*B*。也就是说：如果走到了*A*点的话，下一步无论沿着哪条边走，也只能走到*B*点；如果从*B*点出发，无

论怎样走，也只能走到A点。这样，在这条哈密顿通路上，只能交错地出现顶点 $A,B,A,B,\cdots\cdots$ 而不可能连续地出现两个A，例如：$A,B,A,A,B,\cdots\cdots$或者出现两个连续的B。然而，在图 39(b)上，标记是A的顶点共有 9 个，标记是B的顶点共有 7 个，这样，A就比B多了 2 个。要想把这 16 个顶点一次都走到，并且不重复，无论怎样安排这些顶点的顺序，总是至少要有 2 个A点挨在一块儿才行。也就是说，如果图 39 (b)有一条哈密顿通路的话，它必须要连续地经过 2 个A点才行。但是，根据我们对图 39(b)进行的标记，在图上的任何一条通路是不可能连续地经过 2 个A点的，于是可以看出在图 39(b)上是不可能存在哈密顿通路的，这样，原来的图 39(a)自然也就不存在哈密顿通路了。

在解这个问题时，我们所采用的就是"交错标记法"：先给图的顶点交错标记上两种不同的符号(或涂上两种不同的颜色)，再根据在这类图里可能有哈密顿通路所具备的必要条件，就是通路上不能连续地出现同一种符号，来判断这图是否可能具有哈密顿通路。

下面我们再来看看前面提出的棋盘上跳马问题：

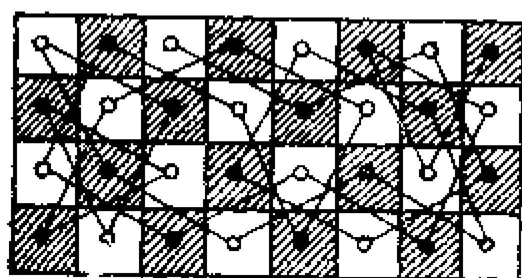
马能否在半个棋盘上连续地把每个方格都跳到一遍？

我们可以考虑这样一个图：让它的顶点对应棋盘的方格，如果马从棋盘上的一个格能跳到另一个格，就在这两个格对应的顶点间连上一条边。这样，原来的问题就可以转变成判断棋盘所对应的这个图是否有一条哈密顿通路的问题了。

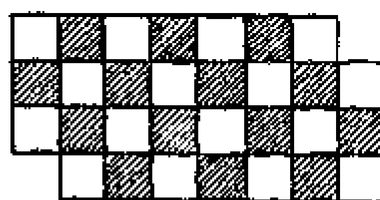
在这里，顶点的邻接方式是由跳马的方式决定的，也就是说每个顶点只能跟和它组成一个"日"字的对角线上的顶点邻接。棋盘上组成"日"字对角线的方格所着的颜色正好是相反的，我们让图上每个顶点着上它所对应的方格的颜色，这

样，图上每条边所关联的两个顶点的颜色都是一黑一白，于是图上所有的顶点正好是黑白交错标记的。在这个图上，如果有一条哈密顿通路的话，棋盘上的顶点也必然是黑白交错出现的。

在半个棋盘格上，黑、白方格的格数是相同的，这就是说它们对应的黑、白顶点的个数也是相同的，这就不排除存在哈密顿通路的可能性。我们仍采取试探的方法来找这条通路。在这里我们不准备详细画出半个棋盘所对应的那个图，只给出一个具体的答案，见图 40。图中右上角的黑方格是通路的起点。


图 40

现在再来回答这个问题的第二部分：如果把半个棋盘对角线上的两个黑色方格去掉，那么，是否还存在一条同样性质的通路呢？我们仍然采用“交错标记法”，把它转换成求对应的图是否存在哈密顿通路的问题。不过，这里为了叙述上的方便，我们直接对棋盘进行分析。这时，由于去掉了两个黑色的方格，剩下的棋盘里白色方格要比黑色方格多 2 个，如图 41。在这种情况下，要想仍然以马跳日的方式把每个方格都跳到一次并且仅仅一次，就得连续地在 2 个白格之间跳一次才行。然而，根据棋盘的构造——任何一个日字的对角线上两个方格颜色都是相异的，因此，这一步跳是无法实现，。这样，对于去掉两个黑色方格的半个棋盘来说，马是无法连续地把每个方格都跳到一次并且仅仅一次的。


图 41

采用交错标记法，判断以上这类问题的哈密顿通路是否存在，是比较简便的。但是，并非所有判断一个给定的图的哈密顿通路的问题都能采用这种方法。只有在对顶点进行交错标记而不会发生矛盾的时候，也就是图的同一个顶点不会同时被标上不同记号的时候，才可以使用。对于有些图，例如图 42，就不能进行交错标记，因此也就不能采用这种方法判断它是否具有哈密顿通路。

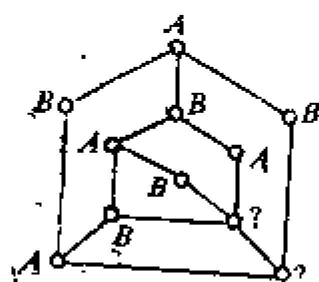


图 42

另外一点需要注意的是，交错标记法一般用在否定一个图具有哈密顿通路的情况。把一个图的顶点交错标记了两种符号之后，如果其中一种符号的个数比另一种多2个以上，例如图 39(*b*) 和图 41，那么，这种图一定不存在哈密顿通路。但是，如果一个图的顶点交错标记的两种符号的个数正好相等，或者只相差 1 个，这时，我们不能仅仅根据这一点就肯定图上一定存在哈密顿通路，而只能说有存在的可能性，不能说有存在的必然性。例如，对于图 40，这种可能性由于确实找到了一条哈密顿通路而变成了现实。对于图 43，虽然把它的顶点交错标上黑色和白色后，黑色顶点和白色顶点的个数相等，都是 5 个，但是这个图并不存在一条哈密顿通路。因此对于具体的图，判断它是否具有哈密顿通路，一定要作具体的分析才行。

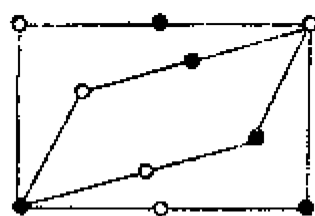


图 43

练　习　六

1. 判断图 44 里各图是否有哈密顿通路。

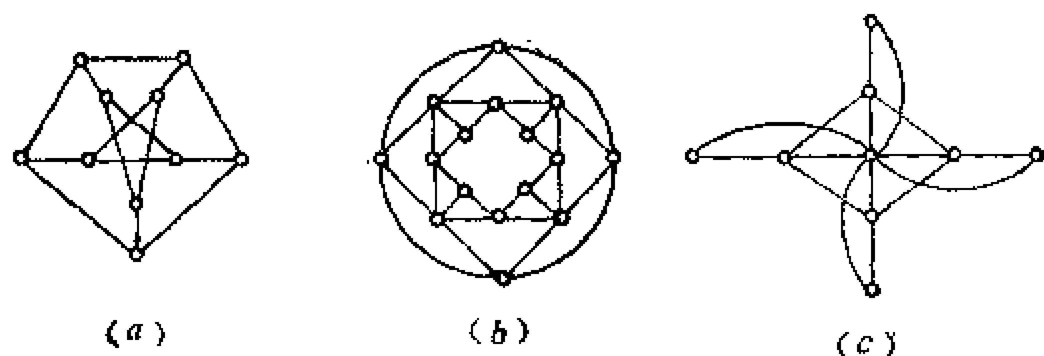


图 44

2. 已知在7个小孩中，每个小孩至少认识其他3个小孩。能否让这7个小孩排成一行，使得每个小孩和他相邻的小孩都认识？

3. 一位厨师用8种原料做菜，每种菜都用2种原料搭配。已知每种原料都至少用在4种菜里。问：能否从这位厨师做的菜中选出4种，正好包括了8种不同的原料？

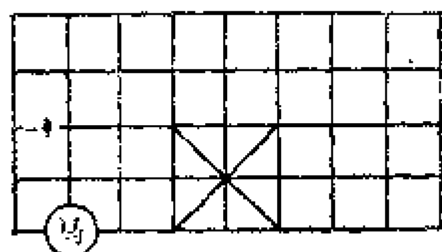
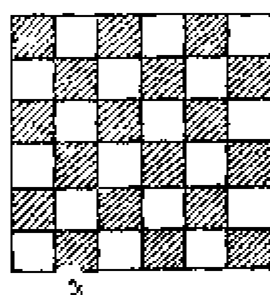


图 45

*4. 如图45所示的半个中国象棋棋盘。马从所在的位置出发，跳奇数步后，能否回到原来的地方？

*5. 对于图46(a)、(b)两个方格盘，能否分别用几张


(a)

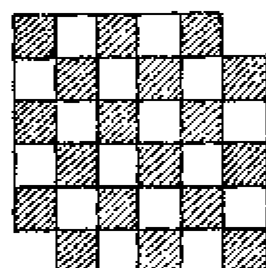

(b)

图 46

大小恰好是两个方格的硬纸片去覆盖它们，使得方格盘上的每个方格都被覆盖一次并且仅仅一次？

*6. 在7天里面安排7门课的考试，要使得同一位老师教的两门课考试不排在接连的两天里。如果同一位老师教的考试课程最多4门，证明：这种安排总是可以的。

七　哪个苹果重？

——有向图简介

在图论的应用中，遇到有些问题，图上一对顶点之间的关系不是对称的。

为了在图上表示这种顶点不对称的关系，我们在把这两顶点连接起来的边上用标明方向的方法来描述。

下面我们先举一个例子。

哪个苹果重？

把25个重量各不相等的苹果放在桌子上，排成一个 5×5 的方阵，如图47所示。

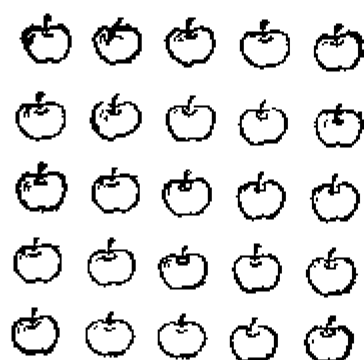


图 47

先从每一行里挑出一个最重的苹果，再在这挑出的5个苹果中选出一个最轻的，标上记号 a，然后把这几个苹果放回原处。

接着，从每一列里挑出一个最轻的苹果，再在这5个苹果中选出一个最重的，标上记号 b，然后把各苹果放回原处。已知 a、b 是不同行也不同列的苹果。

现在要问：苹果 a 和苹果 b 哪个重？

我们可以采取一种图解的方法来回答这个问题。画出25

个顶点组成的 5 × 5 方阵，对应这 25 个不等重量的苹果。假设苹果 a 在第一行第一列，苹果 b 在第四行第三列（这种假设可以是任意的），在图上分别标出它们。然后，我们再把和苹果 a 同行而和苹果 b 同列就是第一行第三列的那个苹果标上记号 c，如图 48。现在我们来看看，苹果a、c、b之间有什么关系。

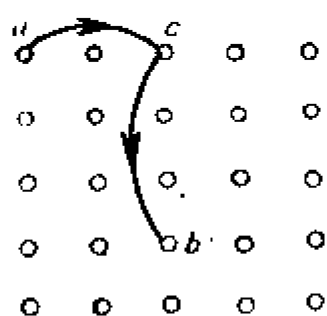


图 48

由题设已知，a 是第一行里最重的苹果，所以 a 自然要比 c 重，又知 b 是第三列里最轻的苹果，所以 b 自然要比 c 轻。我们在 a 和 c 之间、c 和 b 之间各画一条"有向边"，边的方向从重的一只指向轻的一只，这样就有了一条从 a 指向 c、又从 c 指向 b 的有向通路，这表示苹果 a 比苹果 c 重，而苹果 c 又比苹果 b 重。所以，苹果 a 自然要比苹果 b 重了。

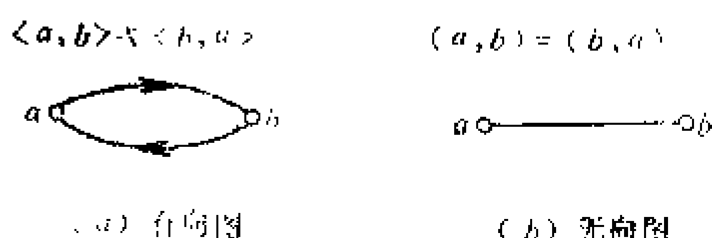
当然，在图 48 上，苹果 a 和第一行其他各苹果之间，苹果 b 和第三列其他各苹果之间，也都可以用有向边连接，但是由于这些边和解答这题没有直接关系，所以我们就省略了。

有向图和无向图

图 48 上画出的边都是有方向的，这样的图就叫做"有向图"，前面各章所画的图边上都没有方向，这样的图就叫做"无向图"。

有向图和无向图的根本区别就在于：有向图的各边都是有方向的，而无向图的各边都是无方向的。在有向图里，我们用〈a，b〉表示一条从顶点 a 指向 b 的边，a 叫做有向边

的起点，b 叫做有向边的终点，并且认为：当 $a\neq b$ 的时候，$\langle a, b\rangle$ 和 $\langle b, a\rangle$ 是两条不相同的边，如图 49 (a)。而在无向图里，我们认为边 (a, b) 和边 (b, a) 是同一条边，如图49(b)。



(a) 有向图　　(b) 无向图

图 49

一个有向的完全图 K_n 是指任意两顶点间都恰有 2 条反向的有向边的图。例如，图 50 就是一个有 4 个顶点的有向完全图，它共有 12 条有向边。因此，对于有 n 个顶点的有向完全图来说，它的边数是 A_n^2 条。

前面我们大部分讲到的都是无向图，有时也隐隐约约地涉及到有向图。例如，在走迷宫问题里，当迷宫的入口、出口已经确定的时候，整个通路就是一条有向的了，只不过由于用无向图来解对问题的结果没有什么影响，所以没有明确指出罢了。然而，在实际问题里，有些问题却非要采用有向图来解不可，因为在这类问题里，一条边所关联的两个顶点在某一“关系”中所起的作用或所处的地位是不相同的，所以只能用有向边来表示，而用无向边，就表示不出两顶点间这种不平等的关系。例如刚才讲到的比较苹果轻重的问题，对于轻重不相等的两个苹果，例如 a、c，如果已知 a 比 c 重，就不能同时再有 a 比 c 轻，因此，这时只能用有向边 $\langle a、c\rangle$ 来表示两个苹果之间这种重量不相等的关系。

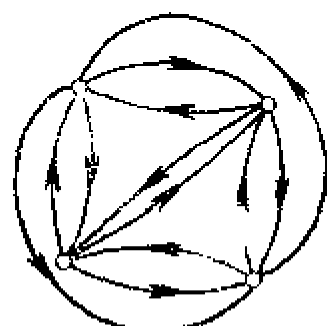


图 50

一系列首尾衔接的有向边序列就构成了有向图里的一条“有向通路”。其中，前一条有向边的终点一定是后一条有向边的起点。例如图 51 里，边$\langle a,b\rangle$、$\langle b,c\rangle$、$\langle c,d\rangle$构成了从顶点 a 到顶点 d 的一条有向通路，而边$\langle a,b\rangle$、$\langle e,b\rangle$不能构成从顶点 a 到顶点 e 的有向通路。

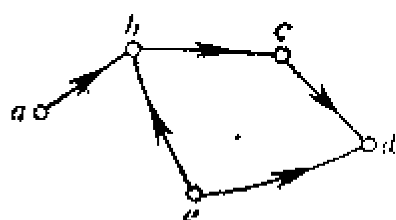


图 51

三 种 连 通 性

我们在走迷宫的问题里已经介绍过无向图的连通性。所谓一个无向图是连通的，就是说图上任意两顶点之间都存在一条通路。然而，有向图的连通性却没有这么简单，它要分以下三种情况来讨论：

第一，“强连通”。有向图里，如果任意两顶点如 a 、b 之间，既存在一条从 a 到 b 的有向通路，又存在一条从 b 到 a 的有向通路，那么有向图是强连通的。

例如地下铁道网，它是双向的，就是说各站之间既能来又能往，因此是个强连通的有向图。

第二，“单向连通”。有向图里，如果任意两顶点如 a 、b 之间，存在一条或者从 a 到 b 、或者从 b 到 a 的有向通路，那么有向图是单向连通的。

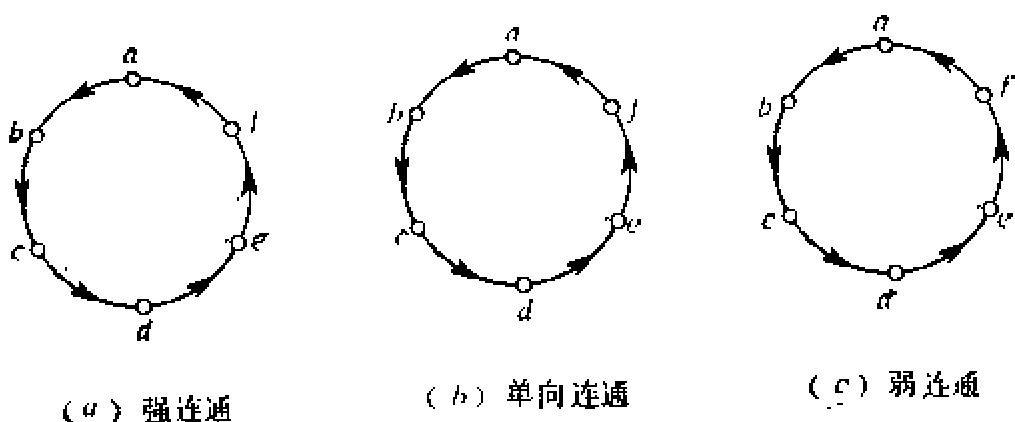
这也就是说，在单向连通的情况下，并不要求任意两顶点之间都要有一来一往的两条通路，而是只要有一条通路就行。例如地铁单侧轨道各站之间，只能是个单向连通的有向图。

第三，“弱连通”。一个有向图，如果去掉它各边的方向后所得到的无向图是连通的，那么有向图是弱连通的。

为了进一步比较这三种连通的概念，图52给出了对应三

种不同连通情况的有向图。

在图52(a)里，任意两个顶点之间都有一来一往的有向通



(a) 强连通　　(b) 单向连通　　(c) 弱连通

图 52

路，例如从 a 可以经 b、c 到 d，而从 d 可以经 e、f 到 a，因此是强连通图。在图 52 (b)里，任意两顶点之间只有一个方向的有向通路，例如从 a 可以经 b、c 或经 f、e 到 d，而从 d 不能到 a，因此它是个单向连通图。在图 52 (c)里，a、d 两顶点之间，既没有从 a 到 d 的有向通路，也没有从 d 到 a 的有向通路，但是去掉图上边的方向后，整个图是连通的，因此它是弱连通图。

当然，如果一个有向图连弱连通也不是，那么这个图必然是不连通的了。

练　习　七

1. 4 个人张、王、李、赵的年龄分别是 15、26、37、49。试画出对应他们年龄大小关系的有向图。

2. 指出图 53 里所有的有向通路。

3. 画出有向完全图 K_3、K_5。

4. A、B、C、D、E 5 个人进行象棋比赛，已知各局结果如下表所示，其中"1"表示这数对应的行上选手战胜了对应

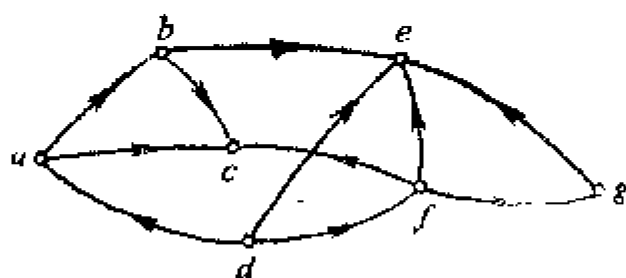


图 53

的列上选手，而"－1"表示相反的情况。试画出对应这表的有向图。

	A	B	C	D	E
A	0	−1	1	−1	1
B	1	0	1	1	−1
C	−1	−1	0	1	1
D	1	−1	−1	0	1
E	−1	1	−1	−1	0

其中，谁得胜局比较多？谁得败局比较多？

5. 指出图 54 里各图都属于哪种连通？



(a)



(b)



(c)

图 54

八　这些图相同吗?

——图的同构

不知道你是否有过这种体会:在学习一些新知识的时候,往往要和头脑里已有的旧观念作点"决裂",或者至少能从旧观念里跳出来,否则,新的观念是很难被接受的。在学习图论的过程中,也会遇到这种情况。

相同,还是不相同?

现在问你这样一个问题:图 55 里的两个图是否相同?

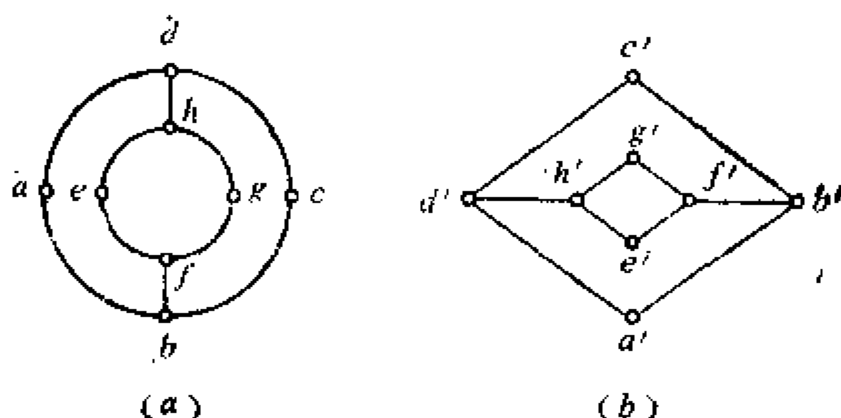


图 55

你可能会马上回答:当然不相同!一个是圆形的,一个是菱形的,怎么能相同呢?

我说你这个回答,也对也不对。

为什么这样说呢?因为从传统的欧几里得几何学的角度来看,这两个图确实是不相同的,它们有不同的形状。

然而，从图论的角度来看，它们却是相同的，因为它们有相同的顶点数，并且两个图各顶点的邻接关系也是相同的。也就是说，这两个图的顶点和顶点之间，边和边之间存在一一对应的关系。比如，图 55 (a)的顶点 a、b、c、d、e、f、g、h 可以分别对应图 55 (b)的顶点 a'、b'、c'、d'、e'、f'、g'、h'，并且图 55 (a)里有(a,b)、(b,f)等边，图 55 (b)里也有(a',b')、($b'f'$)等边，而图 55(a)里没有(a,e)、(c,g)等边，图 55 (b)里也没有(a',e')、(c',g')等边。因此，这两个图虽然外形不一样，但是它们顶点之间的邻接关系是相同的。在图论里，就认为它们是相同的图。这样的图就叫做“同构”的图。

图论里的图要比欧几里得几何学里的图抽象得多。由于它描绘的是事物之间的某种“关系”，而不是事物的几何形状，因此它不在乎图形的外形和大小，更不涉及长度、面积、体积、角度等这些量，它只包含顶点和边这两种要素，用这两种要素来描绘事物之间的种种关系就足够了。这样，在图论里判断两个图是否相同，就是说是否同构，只要看两个图所描绘的顶点邻接关系是否相同就行了，而不需要看这两个图的形状、大小是否相同——这正是图论里的图和欧几里得几何学里的图有本质区别的地方。

怎样判断图的同构

判断两个图是否同构，大致有这么两点：

第一点，比较两个图的顶点数是否相同。如果相同，再进行下一步；

第二点，比较两个图顶点的邻接关系是否相同。所谓邻接关系相同，是指如果一个图的某两个顶点之间有一条边，

另一个图对应的两个顶点之间也有一条边；而如果一个图的某两个顶点之间没有边，另一个图对应的两个顶点之间也没有边。

只有以上两点都满足，两个图才是同构的；如果其中一点不满足，两个图就不同构。

现在我们根据这两点，来分别判断下面几组图是否同构。

先看第一组图，如图 56 所示。

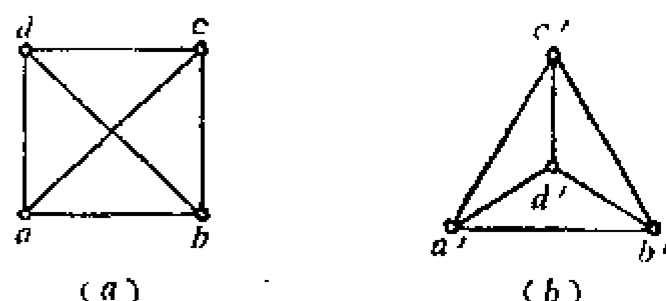


图 56

这两个图外形是很不相同的，但是这和判断两个图是否同构无关，我们且不管它。先看两个图的顶点数，它们都是 4，是相同的，符合判断条件第一点。再看两图顶点间的邻接关系，图 56 (*a*)上每个顶点和其他三个顶点都有边相关联，而图 56 (*b*)也是这样，实际上它们都是有 4 个顶点的完全图 K_4，因此它们顶点间的邻接关系自然是相同的，这就可以判断它们是同构的图。它们顶点间的对应关系可以列成下表：

图 56(*a*)	*a*	*b*	*c*	*d*
图 56(*b*)	*a*′	*b*′	*c*′	*d*′

由于K_4顶点的对称性，因此两个K_4顶点之间的对应关系不是唯一的，还可以有其他的选择。例如，令图 56 (*a*)

的 a、b、c、d 分别对应图 56 (b)的 b'、c'、d'、a' 也是可以的。

现在来看第二组图，如图 57 所示。

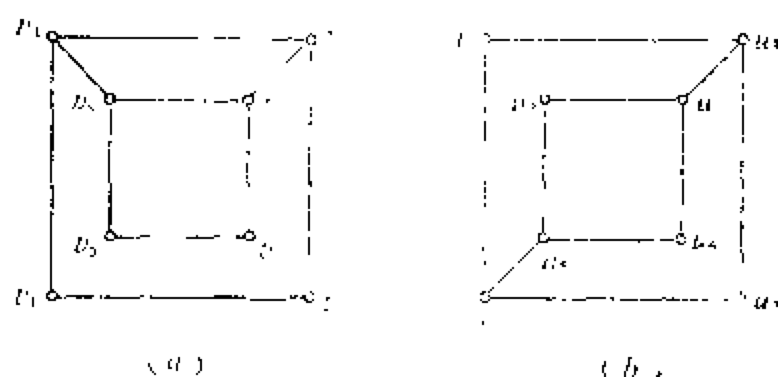


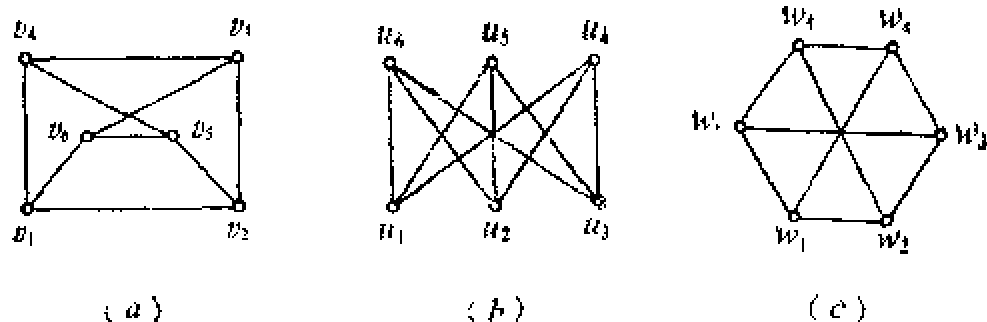
图 57

这两个图外形很相象，但是否一定是同构的图呢？我们不能只从表面看问题，还是深入地分析一下吧！

这两个图的顶点数是相同的，都是 8，符合判断条件的第一点。但是只凭这一点还是不够的，我们再来看看它们顶点间的邻接关系是否一一对应。这两个图里各有 4 个度数是 3 的顶点，但是在图 57 (a)里顶点度数是 3 的 4 个顶点 v_3、v_4、v_6、v_7 之间有一个由 4 条边围成的回路(v_4、v_6、v_7、v_3、v_4)，而在图 57(b)里，顶点度数是 3 的 4 个顶点 u_1、u_6、u_7、u_8 之间却不存在由 4 条边围成的回路。可见这两个图顶点间的邻接关系是不一样的，不符合判断条件的第二点，所以我们说图 57 里的两个图不是同构的。

最后，我们看第三组图，如图 58 所示。

这三个图的顶点数都是 6。再仔细观察一下这几个图，就会发现它们都有这么一个特点：每个图的 6 个顶点都可以分成两组，每组 3 个顶点，并且每组中的一个顶点都和另一组中的 3 个顶点各有一条边相关联，而和本组中的顶点没有边相关联。比如图 58 (a)里的顶点可以分成：v_1、v_3、v_5、和



(a)　　　　(b)　　　　(c)

图 58

v_2、v_4、v_6 两组；图 58 (*b*)里的顶点可以分成 u_1、u_2、u_3、和 u_4、u_5、u_6 两组；而图 58 (*c*)里的顶点可以分成 w_1、w_3、w_5、和 w_2、w_4、w_6 两组。每两组顶点间的邻接关系完全符合上面所说的那些特点，也就是说，这三个图顶点间的邻接关系是相同的，所以，它们是同构的图，实际上它们都是一种特殊的图——$K_{3,3}$ 图。关于 $K_{3,3}$ 图我们在后面还要谈到。

三个图顶点间的对应关系可以采取下表所列出的一种方式，当然，这种对应关系也不是唯一的，你可以试着再找几组不同的搭配。

图 58(*a*)	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
图 58(*b*)	u_1	u_4	u_2	u_5	u_3	u_6
图 58(*c*)	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6

有了同构的概念，我们就能够更深刻地理解图论里的图的本质。图论里的图描绘的不是事物的形状或大小，而是事物之间的关系，并且这种关系又是以图里顶点的邻接关系体现出来的。两个顶点个数以及顶点邻接关系相同的图，它们描绘的是同一种事物之间的关系，所以我们认为它们是相同的图，即使它们有不同的外形，也无关紧要。

练 习 八

1. 判断图 59 里哪些图是同构的。

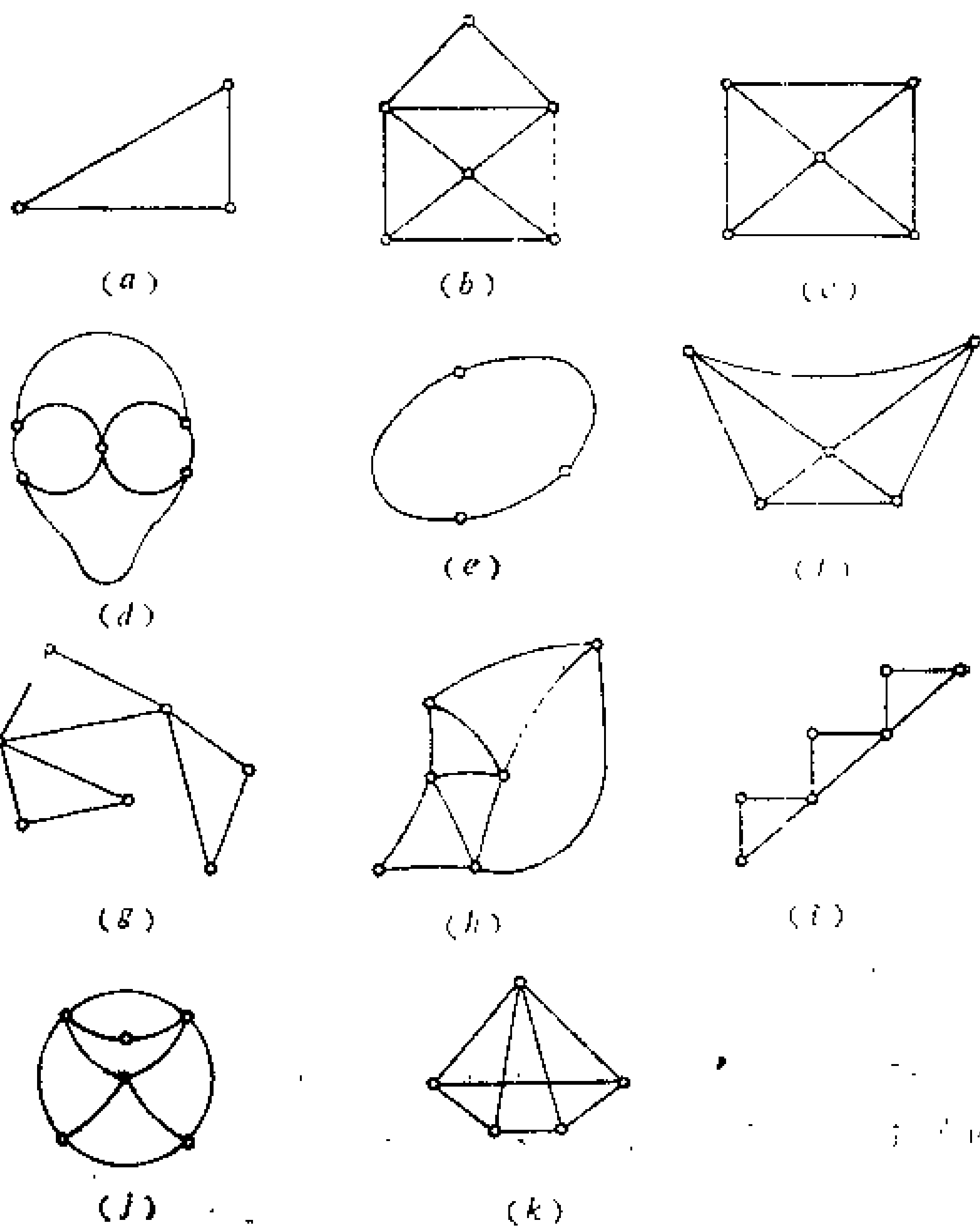
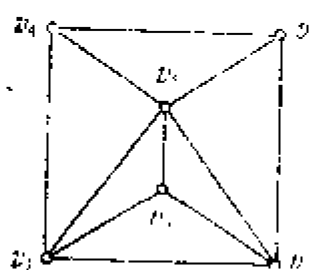
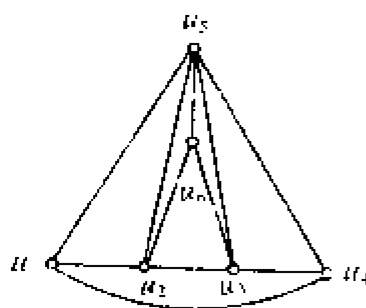


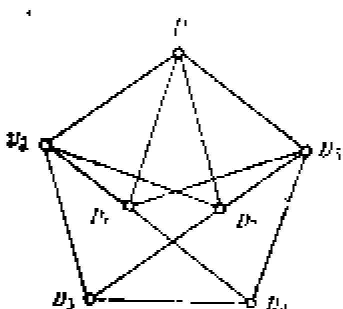
图 59

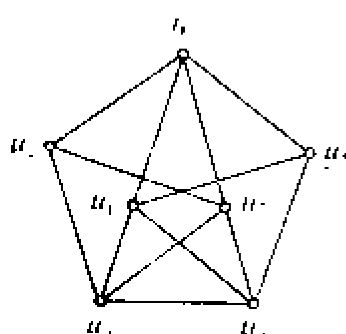
2. 判断图 60 里各组图是否同构。如果同构，列出顶点的对应关系。



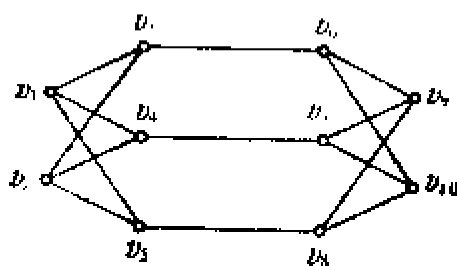


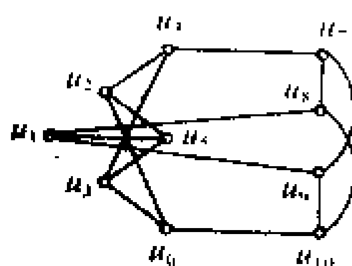
(a)





(b)





(c)

图 60

3. 画出所有具有 3 个顶点 4 条边的无环的非同构的无向图。

4. 画出所有具有 4 个顶点 5 条边的无环的非同构的无向图。

九　千变万化的关系

——图所表示的几种重要关系

无论是在有向图里，还是在无向图里，如果两个顶点之间有一条边，就表示这两个顶点之间存在某种“关系”。在现实世界里存在的各种关系，真是五花八门，千变万化难以尽述。例如，人之间的朋友关系或亲族关系；物之间的循环转化关系；数之间的相等或不相等关系；等等。然而，这些表面上看起来各不相同的具体关系，却不是彼此无关的一盘散沙。按照它们的特点，可以把它们分成若干种类型，同一类型的关系实质上是同一种关系，有共同的属性，可以用统一的图的模型来表示。

自返关系

有这样一个问题：已知小张、小王、小李、小刘4个人的身高如下表所示。请你作一个图，表示出他们之间“身高相等”这种关系。

姓名	小张	小王	小李	小刘
身高(米)	1.60	1.65	1.70	1.70

这个图怎样作呢？自然是先画出4个顶点，分别对应小张、小王、小李、小刘4个人。然后，再根据他们之间身高

是否相等，画出对应的边。如果两个人一样高，就在他们对应的顶点之间连上一条边，如果两个人不一样高，他们对应的顶点之间就没有边。这样，就得到了图 61(a)。这个图里，只有顶点“小李”和“小刘”之间有一条边，这表示小李和小刘一样高。那么，这个图是否完整了呢？你也许会回答："是的。"而我却要说："不，还不行呢！。"这是因为，这 4 个人各自都和自己一样高，而各自“身高相等”这种关系还没有在图上表示出来。为了在图上表示出这种各人和自己等高的关系，我们在 4 个顶点上各画一个环，于是得到了图 61(b)所示的一个带环图，这个图才是对应原来问题的一个完整的图，它无遗漏地反映了这 4 个人“身高相等”的关系。

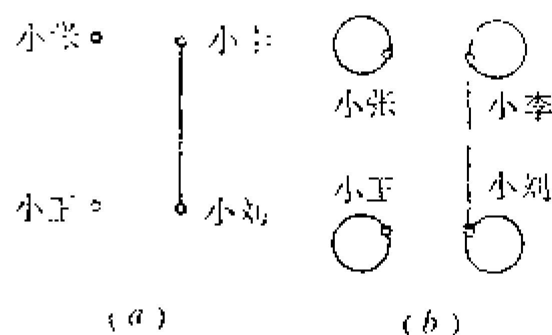


图 61

如果一个图的每个顶点上都有一个环，这就表示每个顶点和自己都存在某种关系，那么，这个图所表示的这种关系叫做“自返关系”。例如，图 61(b)所表示的“身高相等”这种关系就是一种自返关系。

属于自返关系这种类型的关系还有很多，例如若干个人之间“年龄相同”的关系，若干个数之间“数值相等”的关系，等等。如果把这些关系画成图的话，它们的共同特点就是图里每个顶点上都有一个环。

然而，并非所有的关系都是自返的。如果我把前面的问题稍作一下改动：已知小张、小王、小李、小刘 4 个人的身高如表所示(同前)，现在请你画一个对应他们之间“身高不

相等”这种关系的图，你将怎么画呢？

这时，图中的边应该这样确定：当两个人身高不相等的时候，就在他们对应的顶点之间画一条有向边，让有向边的方向从身高的指向身矮的（当然也可以相反），于是得到了一个有向图，如图 62 所示。

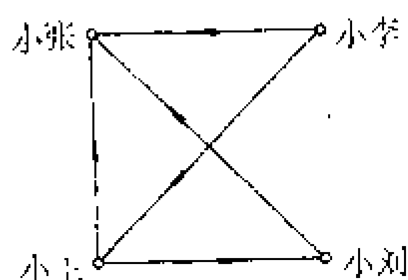


图 62

在这个图里，每个顶点上都没有环，它表示每个顶点所对应的人和自己都没有这种“身高不相等”的关系。这种每个顶点都没有环的图所表示的关系，叫做“非自返关系”。比如象若干个物之间“重量不相等”，若干个数之间“数值不相等”这些关系，都属于非自返关系。

还有一类图，它们的顶点有的有环，有的没有环，例如图 63 所示。这样的图所表示的关系，既不是自返的，也不是非自返的。对于这种关系，没有什么专门的名称，我们就叫它“不自返和不非自返关系”吧。现实生活中确实也存在这种关系。例如已知 a、b、c、d 4 个人中，a、c 都会理发，而 b、d 不会。其中 a 不仅能给别人理发，还能给自己理发，但是 c 只能给别人理发。如果把他们 4 个人之间能理发这种关系作一个图，恰好就得到了图 63。

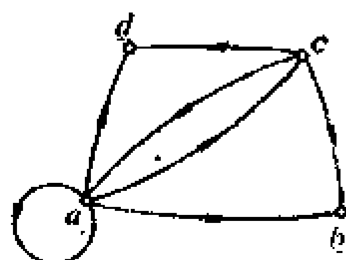


图 63

对称关系

一提起对称，你可能会想起几何学里所学过的“点对称”，“线对称”等概念，同时可能会联想到人体的对称，图案的对称，器具的对称，……世界上对称的东西真是太多了，简直比比皆是，举不胜举。然而，我这里所要告诉你的对称，却不是指这种种有形的对称，而是指一种存在于事物个体之间的、抽象的对称关系。这是一种什么样的关系呢？让我们来看看下面的例子。

已知A、B、C 3 个城市中任意 2 个城市之间都有直通长途电话线路。试画出表示这 3 个城市之间可以“直接通长途电话”这种关系的图来。

我们可以用有向图来画出这种关系，如图 64 所示。图里，每 2 个顶点之间都有 2 条方向相反的有向边，这表示任

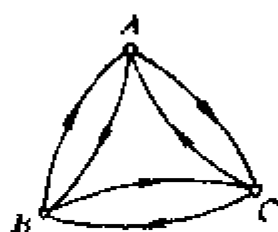


图 64

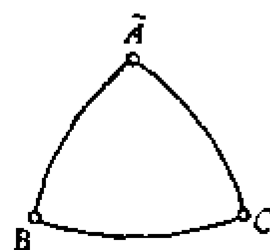


图 65

意 2 个城市，例如A、B之间，既可以从A打长途电话到B，也可以从B打长途电话到A。这样一种有向图所表示的关系，就是一种“对称关系”，这种关系的特点是：如果图里有一条有向边，例如$\langle A, B\rangle$，就同时存在另一条有向边$\langle B, A\rangle$。也就是说，在包含了对称关系的有向图里，两个

顶点之间，要么没有边，要么，如果有边的话，就要成对地出现(方向相反)。

这个问题我们也可以用无向图来描述，画成图 65 的样子。这里，一条无向边表示它所关联的两个城市是可以互通长途电话的，这正好对应图 64 里的一对有向边，它们都表示了两城市间可以通长途电话的关系是对称的。这就说明，一个包含对称关系的有向图是可以简化成为一个相应的无向图的，只要把有向图里成对出现的有向边合并成一条无向边就行了，而无向图所表示的关系，总是对称的。

现实生活中存在的对称关系真是多极了，比如"朋友关系"，"同学关系"，"同行关系"，"同类关系"，等等。但是，也存在不少不对称的关系，例如"父子关系"就是不对称的，因为两个人之间，如果甲是乙的父亲，那么乙就不会是甲的父亲。再如数之间的"大于关系"，如果两个数 A、B 之间，A 大于 B，那么 B 就不会大于 A。这些关系在画成图的时候，只能画成有向图，并且两个顶点之间，如果有边的话，只能是单向边。例如图66，就是一个表示不对称关系的有向图。

不对称的关系，有时也叫做"反对称关系"。

然而，有些有向图里，既存在双向有向边，又存在单向有向边，如图 67。那么，这种图所表示的关系是对称的，

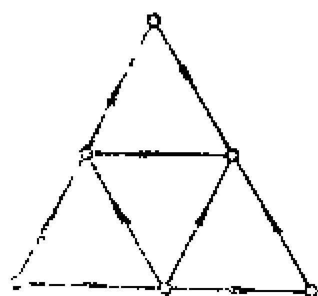


图 66

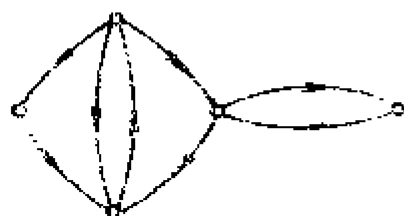


图 67

还是反对称的呢？

这种图所表示的关系既不是对称的，又不是反对称的，也没有专门的名称，我们就叫它“不对称和不反对称”吧。

传递关系

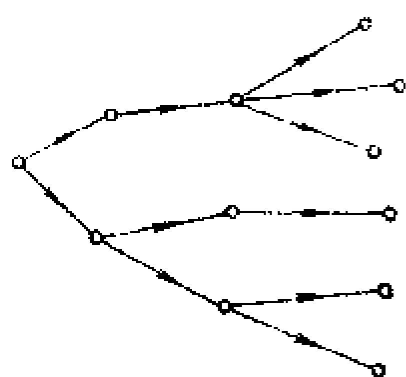
比较几个人的年龄，发现甲比乙大，而乙又比丙大，那么很自然就可以推断出：甲一定比丙年龄大。这种若干个人之间年龄大小的关系，就是一种可以传递的关系，叫做“传递关系”。如果把这种关系画成有向图，就会发现这种图的特点是：如果有了两条衔接的边，例如〈甲，乙〉，〈乙，丙〉，那么必然有第三条边〈甲，丙〉，如图 68 所示。



图 68

所谓传递关系，也可以这样理解：这种关系可以沿着一条有向通路在顶点间传递。如前面所提到的比较苹果重量的问题，在对应的有向图里，沿一条有向通路走下去，前面的苹果总是比它后面的苹果重。

但是，有向图所表示的关系，并不都是可以沿着一条有向通路传递的。例如“父子”关系，它既不是对称的（如前所述），也不是可以传递的。我们可以就一家族里的男性直系亲属之间的关系画一个有向图，如图 69。图上的有向边从父亲指向儿子，这样，一条有向边就表示一个具体的父子


图 69

关系，但是这种父子关系是不能沿着一条有向通路从前向后传递的。只能说一条有向通路上前面的顶点（对应的人）一定是后面的顶点（对应的人）的直系祖先罢了。

当然，如果撇开图所表示的关系的具体含义，而只从图里不包含图 68 的那种三角形，也可以判断出这个图所表示的关系是不可以传递的。

图 69 这种类型的有向图，有时也叫做“家族树”。关于“树”的概念，我们将在后面再作介绍。

我们知道，一个无向图里，总是包含着一种对称关系的。那么，这种关系是否可以沿着一条通路传递下去呢？这也是不能一概而论的。例如，如果我们已经知道，甲、乙、丙 3 个人之间，甲、乙是同班同学，而乙、丙也是同班同学，那么我们可以推知：甲、丙也一定是同班同学，因此这种用无向图表示的“同班同学”关系是可以传递的。对应这种传递关系的无向图，也有类似于对应传递关系的有向图的特点，这就是如果在图上，有两条衔接的边，例如(A,B)、(B,C)，那么，就一定存在第三条边(A,C)。上例对应同班同学关系的无向图如图 70(a)所示。

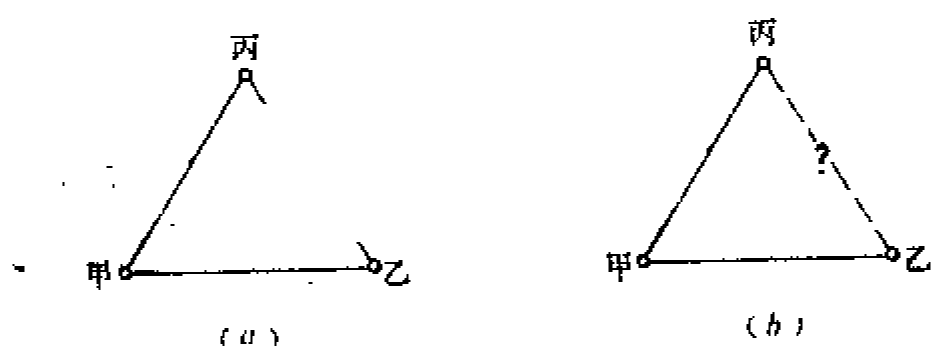


图 70

同样，用无向图表示的关系不一定都是可以传递的。例

如朋友关系。已知甲、乙、丙3个人之间，甲和乙是朋友，甲和丙也是朋友，你能由此推出乙和丙一定是朋友吗？当然这是推不出来的，也许乙和丙还根本不认识呢！因此这种朋友关系是无法传递的，如图70（b）。

练 习 九

1. 指出下列关系各属于哪种类型：

（a） 若干个人之间的认识关系。

（b） 若干个人之间的上、下级关系。

（c） 若干个人之间身高不相等关系。

（d） 若干个人之间进行围棋比赛的胜败关系。

（e） 若干个数之间的不相等关系。

（f） 若干个代数式之间的恒等关系。

（g） 若干个玩具套人之间的嵌套关系。

（h） 26个英文字母的书写顺序关系。

（i） 不同价格的商品之间价格的贵贱比较关系。

（j） 沿同一条铁路线的城市之间的可以到达关系。

（k） 短跑运动员到达终点时候的先后顺序关系（没有两人同时到达终点）。

（l） 一班学生按高矮个儿排队的顺序关系（没有两个人同样高矮）。

2. 给出1，2，3，4，5，6六个数。请就它们之间的如下关系作图：

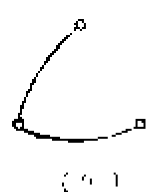
（a） 两数相减的差是非负偶数。

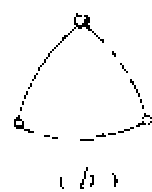
（b） 两数相加的和大于或等于2。

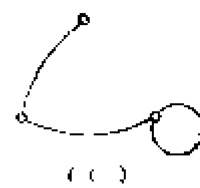
（c） 两数相乘的积不大于15。

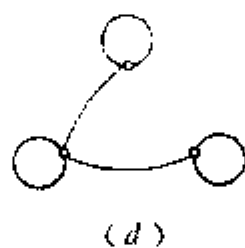
指出各图所表示的是什么类型的关系。

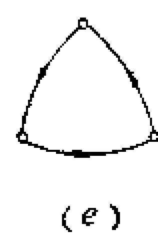
3. 说出图 71 里各图所表示的关系：


(a)

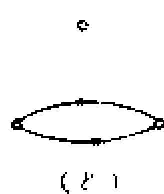

(b)

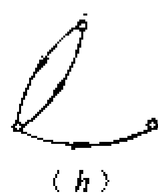

(c)

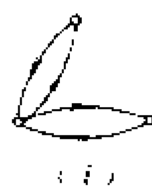

(d)

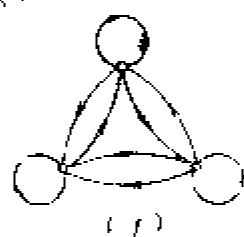

(e)

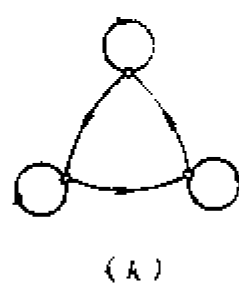

(f)

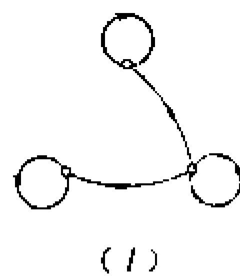

(g)


(h)


(i)


(j)


(k)


(l)

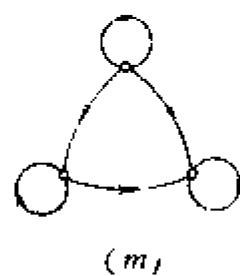

(m)

图 71

十　富有生命力的“树”

——“树”的基本概念

树的生命力是多么旺盛！无论是在荒漠，在盐碱地带，在贫瘠的高原，还是在崇山峻岭，你都会见到生机盎然的树，在和大自然的搏斗中，顽强地生长着。树的踪迹几乎遍及地球的各个角落，在人类的生活中，它起着十分重要的作用。

图论里，也存在几乎无所不在的“树”，我们先从一个例子谈起。

一次乒乓球选拔赛

要在本校8位乒乓球运动员中选1位参加本区乒乓球比赛，采取单淘汰的方法进行选拔，问：一共要进行多少场比赛才能确定最后的人选？

我们采取作图的方法来求比赛的场数。如图72，先画出8个顶点，排成一列，放在最左侧，表示8位运动员。然后把8个顶点每2个分成一组，每组的2个顶点各引出一条边，相交于一点，这样的交点共有4个，它们形成了图的第二列顶点，每个顶点表示第一轮的一场比赛。接着对这4个顶点再2个一组进行同样的处理，就得到图的第三列顶点，它们表示的是第二轮的比赛，共有2场。最后，从第三列的2个顶点再各引出一条边，相交于一点——这就形成了图最

右列的 1 个顶点，它表示的是第三轮也就是最后一场的比赛。

在图 72 里，除了最左边一列的顶点外，其他的每个顶点都表示的是一场比赛，这样的顶点共有 7 个，因此整个选拔赛要进行 7 场比赛才能见分晓。

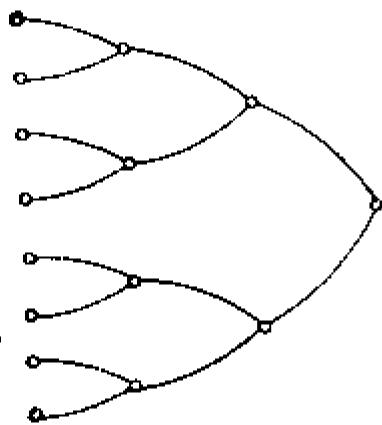


图 72

图 72 就是一棵典型的“树”。所谓“树”就是这样一种图：它的任意两个顶点之间都有一条通路，就是说它是连通的图；同时，还要求图里没有回路，也就是图里任意两个顶点之间不能有两条不同的通路。观察图 72，确实是符合这些条件的。

在树中，度数是 1 的顶点叫做“树叶”，例如图 72 中最左边一列的 8 个顶点就是树的 8 片树叶。此外，树中度数不是 1 的顶点就叫做“分支点”。例如图 72 里左起第二列到第四列的顶点就是树的 7 个分支点。这样，树中的顶点是由树叶和分支点这两部分组成的，这两部分顶点的具体含义往往是不同的。例如图 72 里，树叶表示的是运动员，而分支点表示的是一场比赛。树中的边有时也叫做“树枝”。如果把若

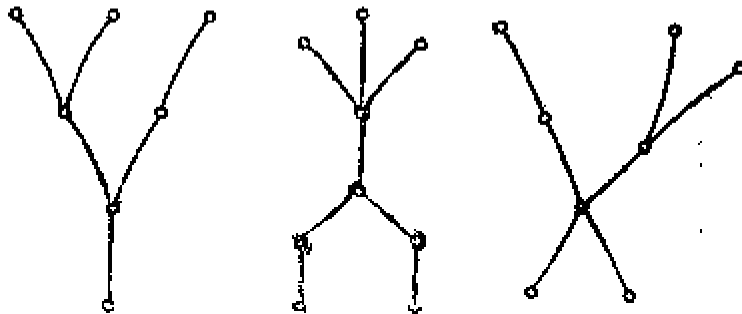


图 73

干棵不相连的树放在一块儿，就组成了“森林”，如图 73 所示。

树的家族

图论里的树，如同大自然里的树一样，形形色色，种类繁多，令人目不暇接。这里有由无向图形成的“无向树”，如图 73；有由有向图形成的“有向树”，如图 74。所谓“有向树”，就是去掉边上的方向后是一棵无向树的有向图。

有向树的边是有方向的，因此一个顶点可能是一条有向边的起点，也可能是一条有向边的终点。一个顶点有几条有向边以它作为起点，就说它的“出度”是几；有几条有向边以它作为终点，就说它的“入度”是几。

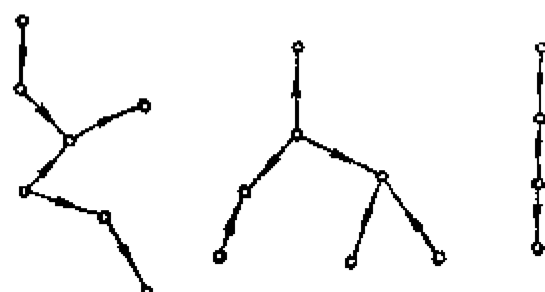


图 74

在有向树中，有一类特殊的树，叫做“根树”，它有一个并且只有一个入度是 0 的顶点，其余的顶点入度都是 1 。在根树中，唯一的入度是 0 的顶点就叫“树根”，而出度是 0 的顶点就是根树的树叶，出度不是 0 的顶点就是根树的分支点。画根树的时候，一般把树根画在图的最上方或最下方，其他顶点按照同一方向顺序排列。这样，根树中每条有向通路的方向都是由树根指向树叶。当根树中每条有向通路的方向都已经确定了之后，我们也可以把根树中每条边的方向去掉，而采取一种简化的根树画法。

图 75(a)给出的就是一棵根树，而图 75(b)是它的简

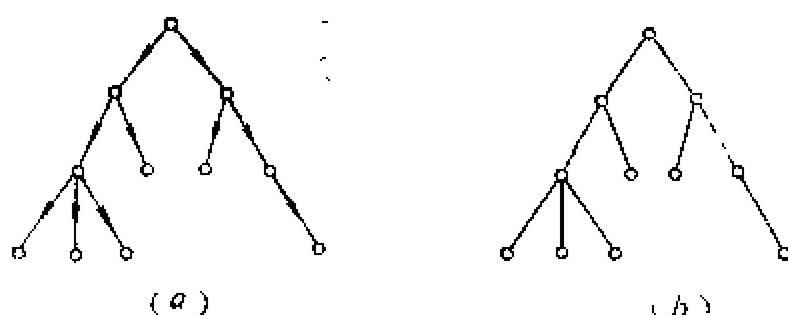


图 75

化画法。

有时我们也把一棵根树叫做一棵“家族树”。如果家族树中从顶点 a 到顶点 b 有一条有向边，就把顶点 b 叫做顶点 a 的“儿子”，而把顶点 a 叫做顶点 b 的“父亲”。如果两个顶点 b、c 同是一个顶点 a 的儿子，就把 b、c 叫做“兄弟”。如果顶点 a 到顶点 e 有一条有向通路，就把顶点 a 叫做顶点 e 的“祖先”，而把顶点 e 叫做顶点 a 的“后代”。采用这些富于人情味儿的名词来描绘一棵根树，不仅使问题变得生动形象，而且也使问题的陈述更加简便。

如果 a 是一棵根树中的一个顶点，那么由 a 和它的后代中的各顶点、由所有从 a 出发的通到树叶的通路上的边所形成的树，叫做“以顶点 a 作为根的子树”。以顶点 a 的一个儿子作为根的子树，叫做“顶点 a 的子树”。请注意这两个名词的区别。

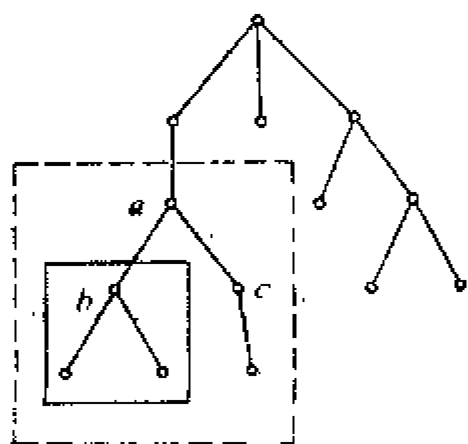


图 76

如图 76，虚线框里的图就是一棵以顶点 a 作为根的子树，而实线框里的图是一棵顶点 a 的子树，它是以顶点 a

的一个儿子 b 作为根的。

在根树中，根据需要，有时要对每个分支点引出的边排个序号，这种每条边都排有序号的树叫做“有序树”。在有序树中，对每个分支点引出的边排序号都要从头排起，而不能对不同分支点引出的边连续地排序号。这样，判断两棵有序树是否同构，除了根据一般的同构条件以外，还要看它们对应边上的序号是否一致，如果不一致，也不能算作同构的有序树。图 77 里的 3 棵树都是有序树，其中(a)、(c)是同构的有序树，而(b)和(a)、(c)不是同构的有序树。

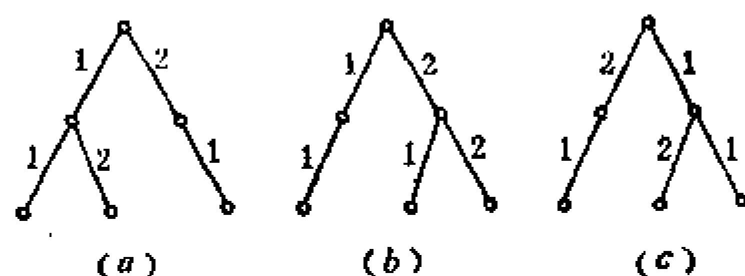


图 77

树的种类真是举不胜举。种种不同的树就组成了庞大的树的家族，它们在广阔的科学领域里各自发挥着生机勃勃的作用。例如，在物理学、化学、生物学、计算机科学等学科领域里，都用到了树。

行遍一棵树

有很多实际问题，如果我们用一棵相应的树来描述它，就会使问题变得简单，有时还会使问题变得更加清晰。

图 78(a)表示的是一个计算机上用到的逻辑线路图。其中 x_1、x_2、x_3、x_4 4 个顶点表示的是 4 个输入端，而分别

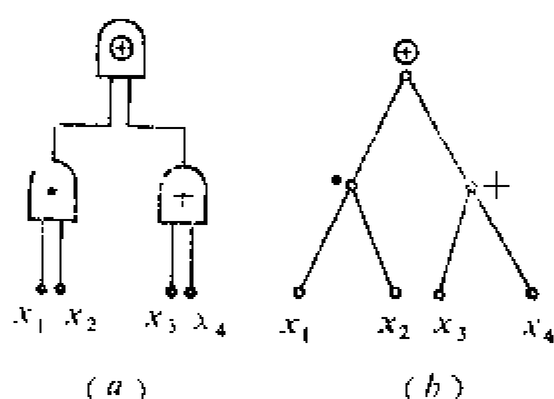


图 78

标志着“·”、“+”、“⊕”符号的3个图形表示的是具有逻辑乘、逻辑加、逻辑半加[①]功能的3个逻辑门电路。如果要把这个逻辑线路所表示的逻辑运算编成相应的程序，输入到计算机里去，应该怎样写出这个程序的表达式呢？

我们先画出一棵对应这个逻辑线路的根树。这棵根树的树叶对应逻辑线路的输入，分支点对应逻辑线路的逻辑门电路，这样得到图 78(b)。

现在我们就根据这棵树，来写出相应的程序表达式。由于表达式必须包括所有的输入和逻辑运算，也就是要包括根树上的所有顶点，这样就涉及到了“行遍一棵树”的问题。所谓“行遍一棵树”，就是按照某种方法把根树中的每个顶点都访问一次并且仅仅访问一次。

根据行遍一棵树的时候访问顶点的先后顺序，我们可以写出相应的程序表达式。

我们先给图 78(b)中树的各条边排个顺序。由于这棵树的树根和每个分支点恰好引出左、右两条边，所以我们对它每个分支点引出的边可以按“左”、“右”的顺序来排。这样的一棵树也叫做“有序的正则二元树”。

在有序正则二元树中，如果以某个分支点作为根的时候，那么它左侧边关联的顶点跟它后面所有的顶点和边就形

① 关于逻辑运算，参看中国青年出版社出版的《懂一点电子计算机》第五章。

成了这个分支点的“左子树”，而它右侧边关联的顶点跟它后面所有的顶点和边就形成了这个分支点的“右子树”。例如图78(b)里，把顶点“⊕”作为根的时候，顶点“·”、x_1、x_2和它们之间的边就形成了“⊕”的左子树；而顶点“+”、x_3、x_4和它们之间的边就形成了“⊕”的右子树。当把顶点“·”作为根的时候，那么它的左子树是顶点x_1和边〈·，x_1〉而右子树是顶点x_2和边〈·，x_2〉。

行遍一棵有序二元正则树的方法是多种多样的。这里我们结合图78(b)介绍几种常用的方法。

一种是“中序行遍”的方法。

采用这种方法行遍一棵树的时候，访问各顶点的顺序是：先访问左子树，再访问树根；最后访问右子树。

需要说明的是：在行遍一棵树的过程中，所谓“树根”是个相对的概念。对于每个分支点来说，当访问到它的时候，都可以把它看成是一个“树根”，同时它还有相应的“左子树”和“右子树”。

按照中序行遍的方法访问图78(b)的树，把树中各顶点按访问的先后顺序从左到右写出来，就得到下面的表达式：

$$(x_1 \cdot x_2) \oplus (x_3 + x_4)。$$

这个表达式就是相应的程序表达式。表达式里的括号用来表示逻辑运算的先后顺序，在按中序行遍法写表达式的时候是不能省去的，这里左右两对括号分别表示树根“⊕”的左右子树。

一种是“前序行遍”的方法。

采用这种方法行遍一棵树的时候，访问树中各顶点的顺序是：先访问树根，再访问左子树，最后访问右子树。

按照这种方法行遍图78(b)的树，得到的相应程序表达

式如下：

$$\oplus \cdot x_1 x_2 + x_3 x_4。$$

前面图5给出的就是这个程序。

一种是“后序行遍”的方法。

采用这种方法行遍一棵树的时候，访问树中各顶点的顺序是：先访问左子树，再访问右子树，最后访问树根。

按照这种方法行遍图78(b)的树，得到的程序表达式如下：

$$x_1 x_2 \cdot x_3 x_4 + \oplus。$$

应用前序行遍或后序行遍的方法写出的程序表达式不用再加括号了。这是因为针对这些表达式，事先规定了一套方法，使得逻辑运算的先后顺序可以由表达式本身确定，不会发生混淆。以前序行遍表达式作为例子。这个表达式里的逻辑运算顺序是从右到左的，也就是先进行最右边一个“+”逻辑运算，参加运算的量就是符号“+”右侧最邻近的两个输入，运算后把已运算过的量划去，把运算结果写在原来“+”的位置上，然后再进行“·”逻辑运算，方法同“+”运算。最后再进行“⊕”逻辑运算，并且把最终结果写在“⊕”的位置上，于是整个运算就完毕了。

下面给出一个具体运算的例子。设输入x_1、x_2、x_3、x_4的值分别是1、0、0、1。按前序行遍表达式进行运算的顺序如下：

第一步“+”运算：$\oplus \cdot 1\ 0 + \underline{0\ 1}$，

第一步运算结果：$\oplus \cdot 1\ 0\ 1\ 0\ 1$；

第二步“·”运算：$\oplus \cdot \underline{1\ 0}\ 1\ 0\ 1$，

第二步运算结果：$\oplus\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1$；

第三步“⊕”运算：$\oplus\ \underline{0}\ 1\ 0\ \underline{1}\ 0\ 1$，

第三步运算结果：　1 0 1 0 1 0 1。

在这个例子里，对表达式里的 4 个输入进行从右到左的逻辑运算后，得到的最后结果是 1。在上面的每一步运算中，底下划横道的二进制数码，表示的是正在参加运算的量；被划上斜道的二进制数码，表示的是已经参加过运算而被消去的量。

一棵根树，如果每个分支点至多引出 2 条有向边，也有的顶点还引出 1 条有向边，这样的根树也可以叫做"二元树"，是一般的二元树，对于这样的二元树，也可以按"左"、"右"的方式给它每个分支点引出的边排序。当某个分支点只引出 1 条边的时候，我们根据这条边是画在分支点的左侧还是右则，来确定它的序号。采用这种方式对二元树排序后，也同样可以用"中序行遍"、"前序行遍"、"后序行遍"的方法来行遍二元树。

练　习　十

1. 画出具有 3 个顶点的非同构的无向树、有向树、有序树。

2. 画出具有 5 个顶点的非同构的无向树。

*3. 画出具有 7 个顶点的非同构的无向树。

4. 在一次单淘汰的单打羽毛球比赛中，有 16 名选手参加。问比赛多少场才能决出冠军？

5. 在下面图 79 的树中，找出：

（a）顶点 v_4的父亲；

（b）顶点 v_4的儿子；

（c）顶点 v_4的一个非父亲的祖先；

（d）顶点 v_4的一个非儿子的后代；

（e）以顶点 v_4 作为树根的子树；

（f）顶点 v_4 的子树。

6. 给图 79 的各条边排序。

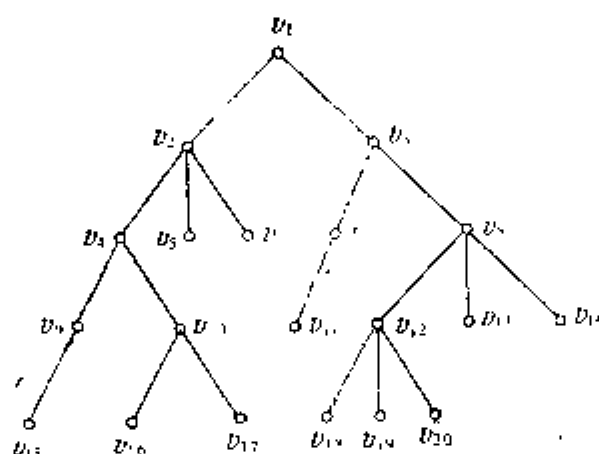


图 79

7. 对于图 80 里的根树，分别写出用下列方法访问顶点的先后顺序。

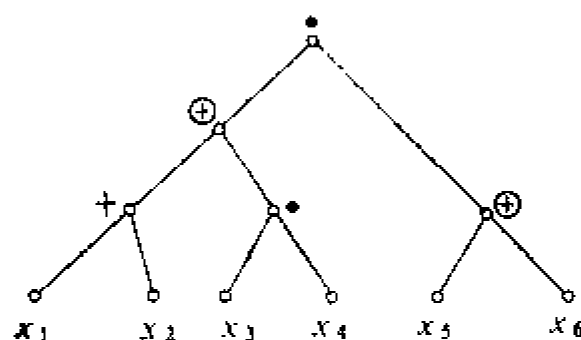


图 80

（a）前序行遍的方法；

（b）中序行遍的方法；

（c）后序行遍的方法。

8. 对于图 81 里的一棵二元树，分别写出用下列方法访问顶点的先后顺序。

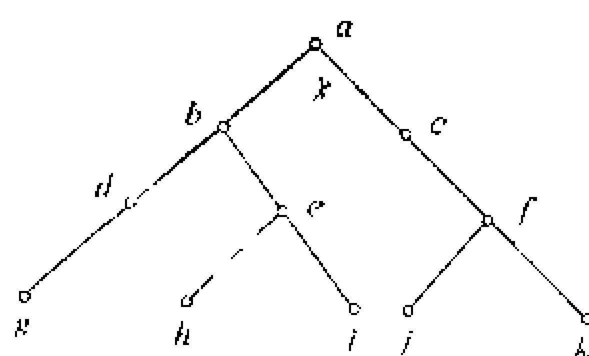


图 81

(a) 前序行遍的方法;

(b) 中序行遍的方法;

(c) 后序行遍的方法。

十一 千姿百态的“树”

——“树”的应用

我们再介绍几种在实际问题中经常用到的树的类型，并且给出求这些树的一般方法，就是算法。

最优二元树

有这样一个问题：有4张表，每张表分别排列有100、200、300、400个数。现在要把这4张表合并成1张。合并的过程是这样的：要求每次只能合并2张表，每合并一次，就把被合并的2张表上的所有数字都重新抄写到一张新的表上。问：怎样进行合并，才能使得在整个过程中，所要抄写的数的总量最少？

解决这个问题，我们要用到“最优二元树”的方法。

所谓“二元树”，前面说过，就是每个分支点最多引出2条有向边的根树。至于什么是最优二元树，我们先介绍一些有关的概念。

如果一棵根树的每片树叶v_i（$1 \leqslant i \leqslant t$）都对应一个实数$w_i$，那我们就把这些实数叫做“树叶的权”，而这样的一棵根树就叫做“带权树”，我们用符号T表示。将每片树叶的权乘上这片树叶和树根之间的通路长度，然后再把得到的各个乘积相加，则把这个和数叫做“整棵带权树的权”，用

$w(T)$来表示，就是：

$$w(T)=\sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i),$$

式子里 t 是带权树 T 的树叶片数，$w_i(1\leqslant i\leqslant t)$是第 i 片树叶 v_i 的权，而 $l(v_i)$表示第 i 片树叶和树根之间的通路长度，符号Σ是连加号，它表示有 t 个乘积项 $w_i l(v_i)$相加。

如果给定一组实数 $w_1, w_2, \cdots, w_t$，让你画出一棵树叶的权分别是 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的二元树，并且求出整棵二元树的权来，那么，由于具体画法的不同，往往可以得到不同的二元树，也就得到不同的整棵二元树的权。例如图 82(a)、图 82(b)都是有 4 片树叶并且每片树叶的权分别是 100、200、300、400 的二元树。尽管它们树叶的权相同，但是它们两棵树的权却不相同，图 82(a)的权是 1900，图 82(b)的权是 2000，因此它们是两棵不同的二元树。它们正好可以用来作为前面那个把 4 张表合并成 1 张表的问题的解：每棵树对应着一种合并方法，而树的权就是在合并表的过程中所抄数字的总量，显然前一种合并方法要比后一种优越。

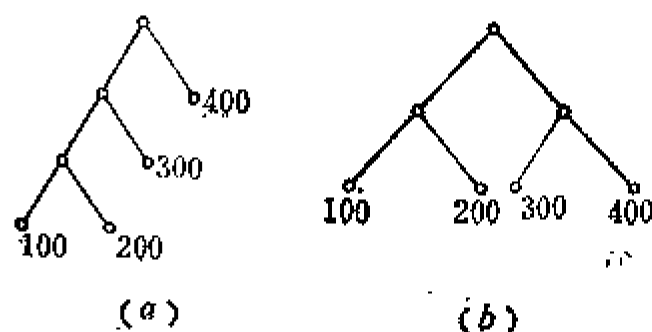


图 82

那么图 82(a)所提供的方法是不是最优的呢？这就要探讨最优二元树的问题。

在树叶具有相同的权w_1，w_2，…，w_t的二元树中，我们把树的权最小的二元树叫做“最优二元树”。

怎样求一棵最优二元树呢？下面给出一个求最优二元树的算法步骤。

已知树叶的权分别是w_1，w_2，…，w_t（$t \geq 2$），并且有$w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_t$。

第一步，从对应最小权w_1、w_2的两片树叶上各引出一条边，相交于一点，这点就成为二元树的第一个分支点，令它的权是w_1+w_2。

第二步，在w_1+w_2，w_3，…，w_t中再找出两个数值最小的，从它们对应的顶点再引出边，相交得到第二个分支点，并且把两个顶点的权相加，作为第二个分支点的权。

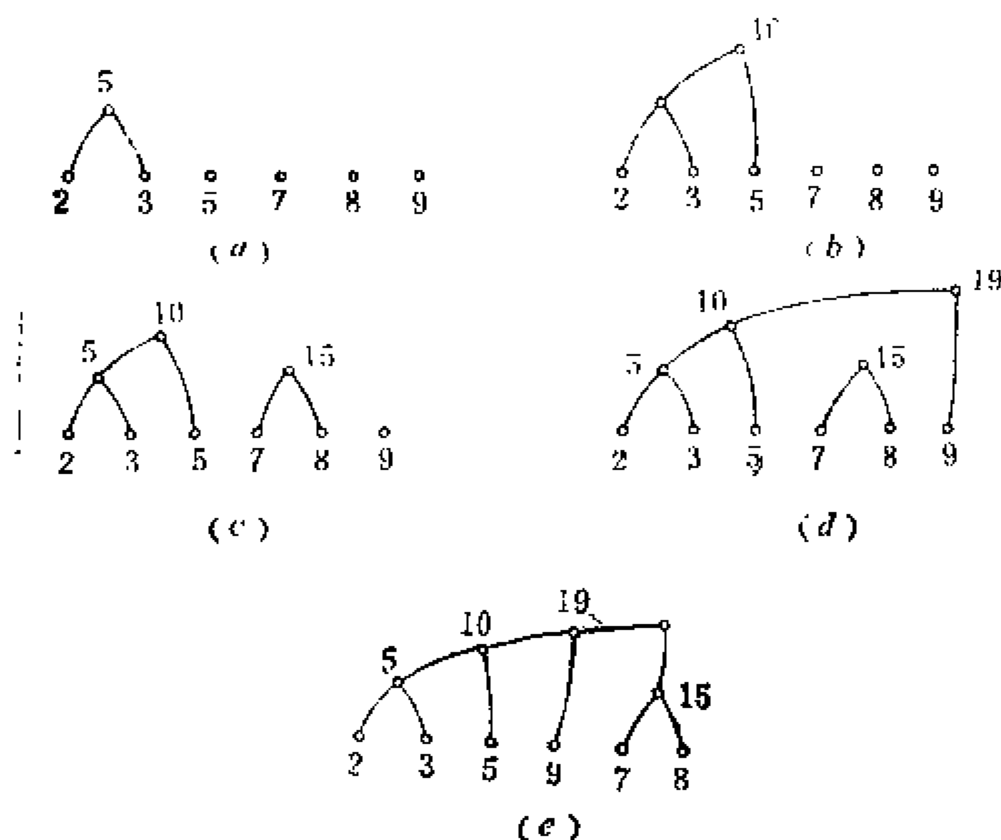


图 83

以后继续重复第二步，直到形成一棵二元树为止。

这样得到的一棵二元树，就是树叶带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的最优二元树。图 82(a)里的树，正是按照这种方法形成的，因此它是具有权 100、200、300，400 的最优二元树，按照它所提供的方法合并 4 张表，就可以使得所抄数字的总量最少。

图 83(e)给出了另一棵树叶带权 2 、 3 、 5 、 7 、 8、9 的最优二元树，图 83(a)到图 83(e)表示了它的形成过程——每一步都是严格地按照算法步骤进行的。这棵树的权是：

$$w(T)=(2+3)\times 4+5\times 3+(7+8+9)\times 2=83。$$

求最优二元树的算法是一种确定性的算法，就是说用它求得的解答确实是最优的解答。

最小支撑树

我们现在再来谈谈另一种重要的树——“最小支撑树”。先看下面的例题。

图 84 表示的是一个 6 个城市间高速公路的设计草图，图上的边表示 6 个城市间所有可能修建的公路，边上的数字表示每条公路的造价(单位：万元)。怎样选择设计方案，才能使得任意两城市间都有公路可通，并且所建造的高速公路网总造价最小？

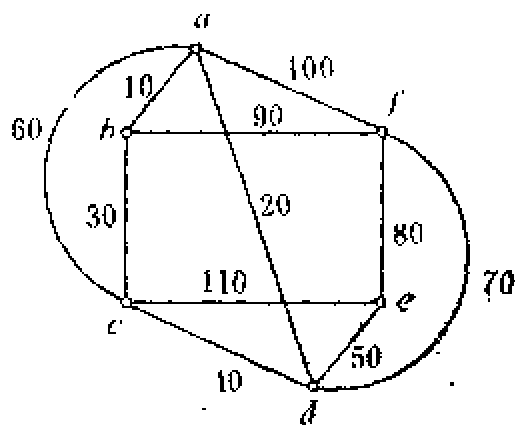


图 84

我们采用这样一个方法来求造价最小的公路网：

第一步，先选取图上造价最小的一条边，就是（a，b）边，作为所求公路网里的第一条边。

第二步，然后，在剩下的边中，再选一条造价最小的边，就是（a，d）边，它和（a，b）边之间不形成回路，所以可以把它加入到所求的最小造价公路网里，作为它的第二条边。

重复以上步骤，顺序地选取所剩图上造价最小的边，只要这条边和已经选定的公路网里的边之间不形成回路，就把这条边选进公路网，如果它和已经选定的边形成回路，那就舍去这条边，而选下一条。例如图 84 里，已经选定了边（a，b）、（a，d）、（b，c）以后，再选（c，d）边就不行了，因为它和前面 3 条边形成回路，因此把它舍去，而选下一条边（d，e）。由于（d，e）和前 3 条边不形成回路，所以可以选入。

对于有 n 个顶点的连通图，只要选取 $n-1$ 条边就可以。这个例子里的图有 6 个顶点，所以只要选取 5 条边就可以。图 85 所表示的就是一条满足要求的总造价最小的公路网，它的总造价是 180 万元。

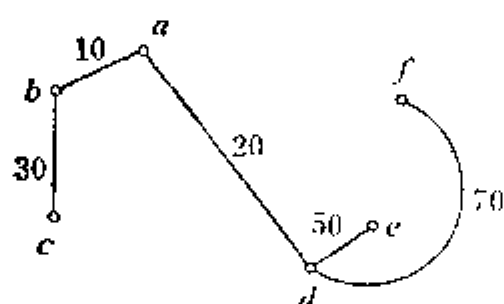


图 85

按照上面的方法画出的图，它的特点是：没有回路，但是任意两个顶点之间都有路可通，就是说它是连通的，因此它是一棵树。此外，这棵树不仅包含了原图的所有顶点，并且还是各边上数字总和最小的。这样的图，我们把它叫做原图的一棵“最小支撑树”。

求一个图的最小支撑树问题，在实际工作中经常会遇到，因此，上面所介绍的算法也是经常用到的。这种算法也

是一种确定性的算法，就是说用它求得的解答确实是最符合要求的解答。

最后需要说明的是：只有对于一个连通的图，才谈得上求最小支撑树的问题，因为不连通的图里是根本不存在树的，当然就更谈不上最小支撑树了。

概 率 树

一些概率问题，有时也可以用树来求解，我们把这种树叫做"概率树"。

举一个例子来说明概率树的应用。

若干个红球和黑球，分别放在3只相同的袋子里。已知一只袋子里有3个红球5个黑球，另一袋子里有6个红球2个黑球，余下的一只袋子里有红球和黑球各4个。随意选其中一只袋子，从袋子里取出一个球，问取出的球是红色或黑色的概率各是多少？

我们画一棵相应的树来解答这个问题。

先画出一个顶点，作为树根，从它引出3条边，每条边标上数值1/3，表示每只袋子被选中的概率各是1/3。这3条边关联的另外3个顶点是分支点Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，各对应一只袋子。然后从这3个分支点再各引出2条边，每条边分别标上从对应袋子里取出红球或黑球的概率值。这6条边关联的另外6个点是树叶，各树叶分别标上符号"R"或"B"，表示取出的球是红色的或黑色的。这样就得到了一棵概率树，如图86所示。

由于在随意的取球中，取出红球或黑球的总概率是从各袋里取出红球的概率或取出黑球的概率的和，因此，相应于概率树来说，就是要分别求出从树根到各个标志"R"或

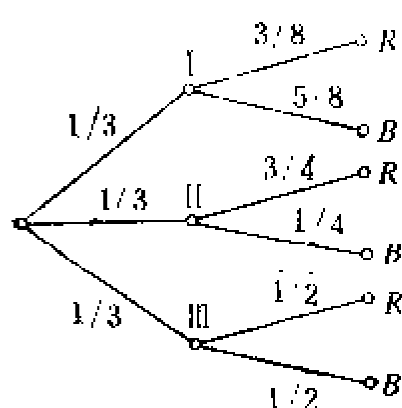


图 86

“B”的树叶的概率——这等于把相应的通路上各条边的概率数值相乘，然后再求它们的和。由图 86 可知，取出红球的概率是：

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{24},$$

而取出黑球的概率：

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{24}。$$

当然，取出黑球的概率也可以用 1 减去取出红球的概率求得。

练 习 十 一

1. 画出树叶的权分别是 3、5、7、9、10 的最优二元树，求树的权 $w(T)$。

2. 画出树叶的权分别是 2、4、6、8、10、12、14、16 的最优二元树 T，求此树 T 的权 $w(T)$。再画一棵树叶的

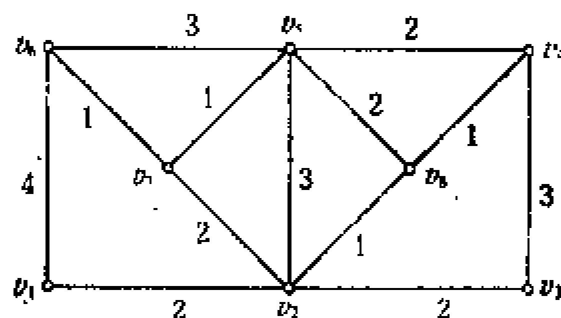


图 87

权分别同上的非最优的二元树 T'，求出 T'的权 $w(T')$。

3. 求图 87 里的一棵最小支撑树。

4. 求图 88 里的一棵最小支撑树。

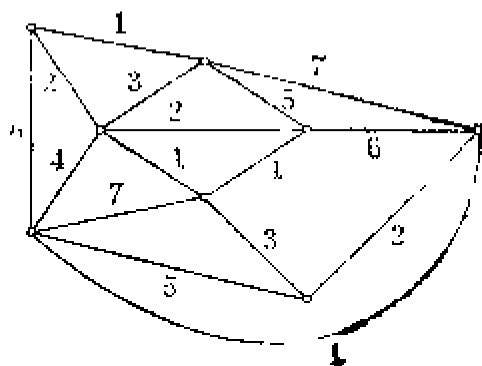


图 88

***5.** 某学科包括实验课和理论课。已知实验课从来不会连续进行，而每次理论课之后，可能是实验课或仍然是理论课。求经过 4 次课以后，是理论课或实验课的概率各是多少。

十二　印刷电路板布线问题

——平面图

在无线电爱好者中，可能有些人做过印刷电路板线路的设计和制造。在印刷电路板设计过程中，经常遇到的问题是：怎样才能使印在同一层板上的线路不会发生短路现象？

这些线能布在同一层板上吗？

为了回答这个问题，我们先来看看图89里的几个图。这几个图表示的都是实际线路，图的顶点表示元件，边表示元件间的连线。现在要问：这几种线路是否都能布在同一层印刷电路板上？我们分别讨论如下：

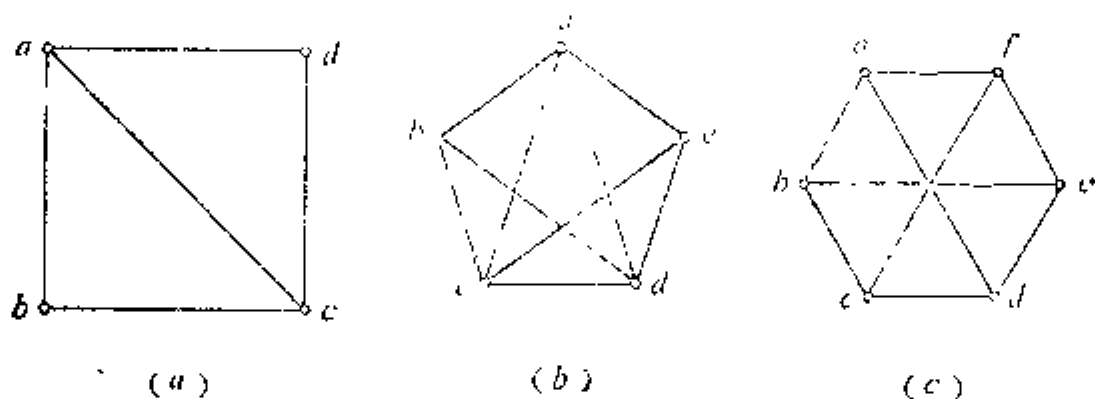


图 89

图 89(a)的线路显然可以布在同一层印刷电路板上，因为图上各边只在顶点处相交，而各边彼此不相交，因此不会发生短路现象。再看图 89(b)，这个图表面看起来，边除

了在顶点处相交外，彼此还相交，如边（e，c）和（d，a）、（d，b），边（a，c）和（d，b），都在顶点之外有交点。但是，在具体布线的时候，只要把边（d，a）、（d，b）的位置稍加改动，把它们移到外面来，这样，图上就没有边在顶点之外相交了，而元件间的连接关系并没有改变，如图90所示。因此，经这样改动后的线路仍然可以布在同一层印刷电路板上，而不会发生短路现象。图 90 里的虚线表示原来连线所在的位置，它已被同一对顶点间的实线所代替。

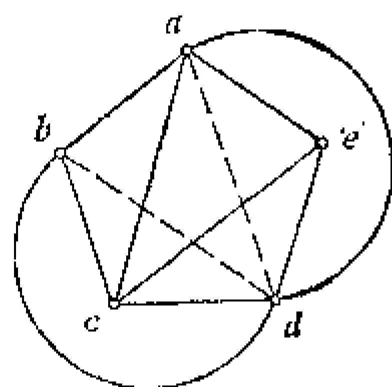


图 90

最后再看图 89（c）。这个图的边任你怎样改动位置，也不可能使图上所有的边都只相交于顶点。例如（a，d）、（b，e）、（c，f）这 3 条边，在图上相交于非顶点的一点。现在，无论怎样移动这几条边，总有两条边在顶点之外相交，如图 91 所示。所以，图 89（c）所对应的线路是不能布在一层印刷电路板上的，否则就会短路。

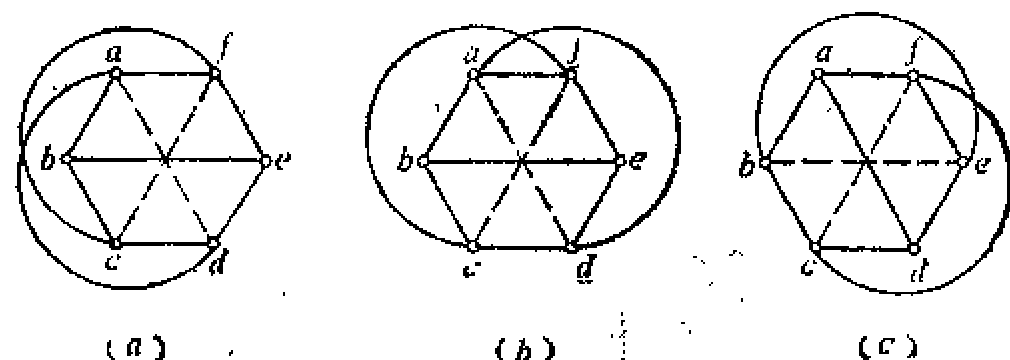


图 91

从上面的例子我们可以看出：同是画在平面上的图，有的可以画成边在顶点之外不相交的，有的就没法画成。根据

这一个特点，我们引入一个新的概念："平面图"。所谓"平面图"，就是可以画成在顶点之外没有交点的图。例如图89(a)和图89(b)。如果图上的边无论怎样移动总在顶点之外有交点，那么这样的图叫做"非平面图"，例如图89(c)。

在平面图中，有这样一类图叫做"极大平面图"，它的特点是：在它任意两个不相邻的顶点之间加上一条边后，得到的图就不再是平面图，而是非平面图了。例如图92(a)，它只有顶点b、e不相邻，如果加上边(b, e)，它就变成一个非平面图了，如图92(b))所示。所以图89(b)就是一个极大平面图。

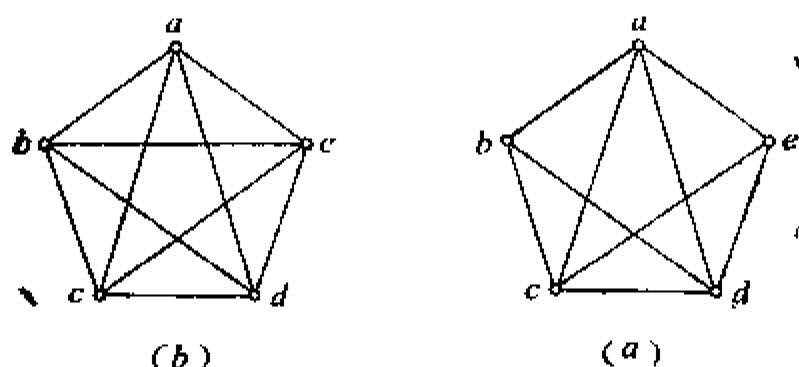


图 92

在非平面图中，有这样一类图叫做"极小非平面图"，它的特点是：在图上去掉任一条非环又非平行边的边之后，得到的图就变成平面图了。例如图93(a)，去掉它的任一条边

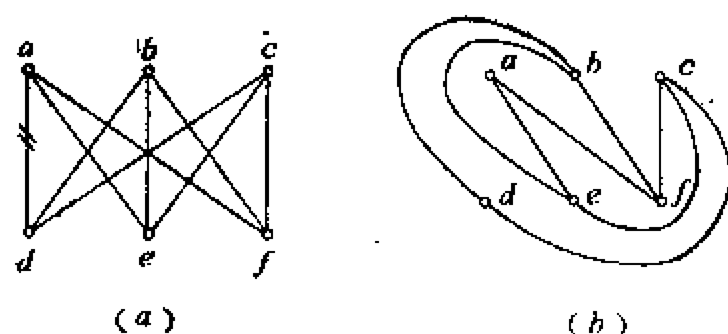


图 93

例如去掉边（a，d）之后，得到的就是一个平面图，如图93（b）所示。

欧勒公式

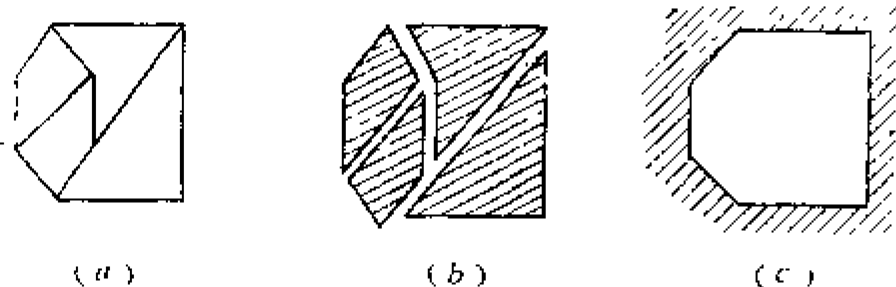
接下来的问题自然是：怎样判断一个图是不是平面图？

欧勒在这里又给了我们一个现成的结论。他发现了平面图有这样一个性质：对于任何连通的平面图，有

$$v-e+r=2。$$

这里v、e、r分别表示图的顶点数、边数和区域数。这个公式就叫做平面图"欧勒公式"。

所谓平面图的区域就是平面图的一块。它包括平面上面积有限的区域，叫做"有限区域"，还包括平面图边界之外的一块面积无限的区域，叫做"无限区域"。例如，在图94（a）的平面图，有4块有限区域和1块无限区域，分别如图94（b）和图94（c）的阴影线所表示的，所以图94（a）总的区域数是5。



（a）　（b）　（c）

图 94

从图94可以验证欧勒公式，这里$v=8$，$e=11$，$r=5$，

$$8-11+5=2。$$

根据欧勒公式，我们可以进一步推导出下面这个结果：对于一个简单的连通的平面图来说，如果它的每个区域至少由k

条边围成($k \geq 3$)，那么它的顶点数和边数之间有如下的关系：

$$e \leq \frac{k}{k-2}(v-2)。$$

我们也可以从图 94 验证这一不等式，这里 $k = 3$，

$$\frac{k}{k-2}(v-2) = \frac{3}{3-2}(8-2) = 18,$$

而

$$e = 11 < 18。$$

以上这些公式我们都不进行具体推导了。

欧勒公式和推导出来的不等式给出的都是连通的平面图所具有的性质，也就是判断一个连通的图是不是平面图的"必要条件"。如果一个图是连通的平面图，那么它必然具备这些性质；反过来，如果一个图不具备这些性质，那么它必然不是一个连通的平面图。可是另一方面，如果一个图具备这些性质，我们也并不能就得出这个图一定是平面图。例如，对于图95，它的边数和顶点数分别是 14 和 8，这里 $k = 3$，有：

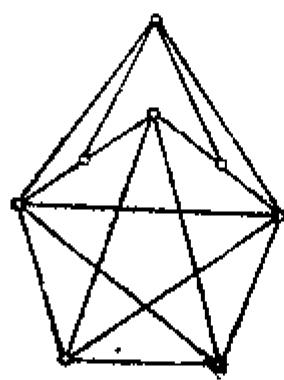


图 95

$$\frac{k}{k-2}(v-2) = \frac{3}{3-2}(8-2) = 18,$$

而

$$e = 14 < 18,$$

就是说，这个图是可以使不等式成立的，但它是个非平面图。

人们往往应用欧勒公式和推导出的不等式来判断非平面图的情况。例如，对于图 96(a)和图 96(b)，你能判断出它们是平面图还是非平面图吗？

假设这两个图都是平面图。我们先看图 96(a)，它的

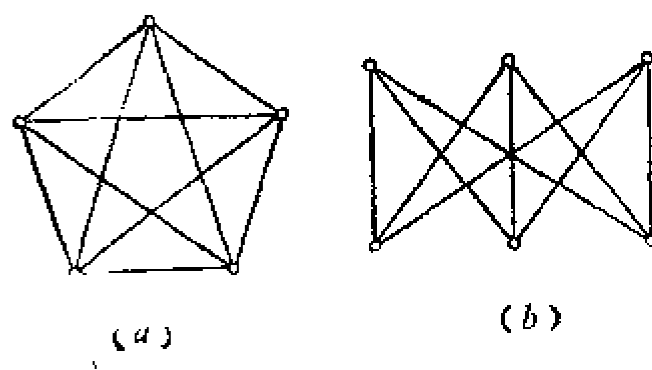


图 96

顶点数和边数分别是 5 和 10。由于图里存在三角形，所以我们取 $k=3$。根据前面的不等式，有

$$\frac{k}{k-2}(v-2)=\frac{3}{3-2}(5-2)=9,$$

而

$$e=10>9,$$

可知不能满足这个不等式的要求，因此这个图不可能是一个平面图。实际上它是一个有 5 个顶点的完全图 K_5，而顶点个数大于或等于 5 的完全图都是非平面图。

现在再看图 96(b)，由于图里不存在三角形，就是任意三个顶点之间都不存在回路，因此，如果图里存在有限区域的话，那么，这个区域至少由 4 条边围成，所以我们取 $k=4$。而图本身的顶点数和边数分别是 6 和 9。把 k 和 v 的值代入不等式右边，有

$$\frac{k}{k-2}(v-2)=\frac{4}{4-2}(6-2)=8,$$

而

$$e=9>8,$$

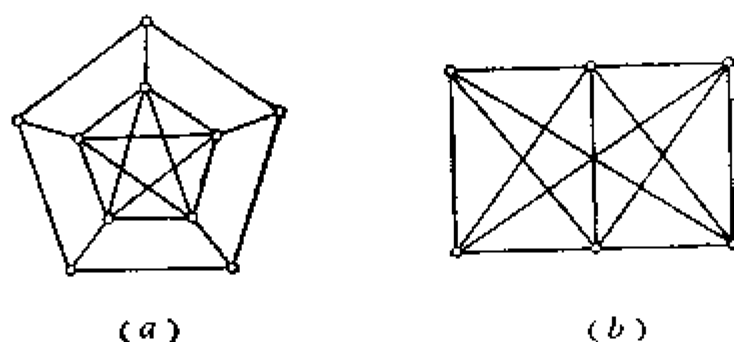
显然也不能满足前面不等式的要求，因此，这个图也是非平

面图。实际上它是一个$K_{3,3}$图。

库拉托夫斯基定理

欧勒公式和推导出的不等式虽然可以用来否定一些图是平面图，但是它对于肯定一个图是平面图却是无能为力的。直到波兰现代数学家库拉托夫斯基（1896-）的著名论文发表之前，判断平面图的充要条件一直是个悬而未决的问题。1930年，库拉托夫斯基就这个问题提出了一个很重要的定理，这就是：一个图是平面图，当且仅当它不包含K_5或$K_{3,3}$这两种图形，K_5和$K_{3,3}$如图96(a)和图96(b)所示。这就叫"库拉托夫斯基定理"。这里给出的是这个定理最简单的一种叙述方式。

举两个例子来说明怎样应用这个定理判断平面图和非平面图。先看图97。图97(a)包含了一个K_5图，而图97(b)包含了一个$K_{3,3}$图，所以根据库拉托夫斯基定理，这两个图都是非平面图。



(a)　　　　(b)

图 97

再来看看图98(a)。这个图既不含有K_5，又不包含$K_{3,3}$，所以根据库拉托夫斯基定理，它必然是平面图。别看它好象很复杂，而且和$K_{3,3}$又很相象，其实，我们只要把它的边的位置稍加改动，同时并不改变图里各顶点原来的

邻接关系，如图 98(b)所示，这样就得到了一个没有边相交在顶点之外的平面图了。

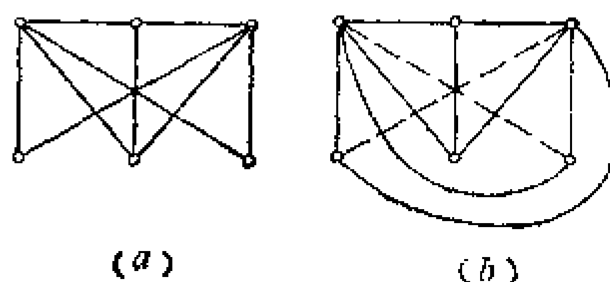


图 98

练 习 十 二

1. 判断图 99(a)、图 99(b)是不是平面图。

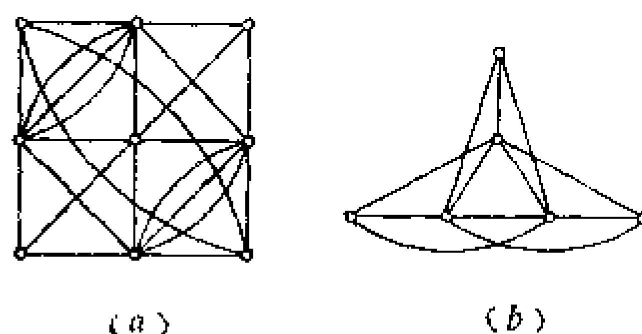


图 99

2. 讨论图 100 的平面性，它是一个极大平面图吗?

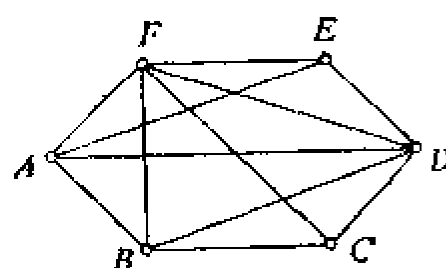


图 100

3. 判断图 101(a)、(b)两图的平面性。

*4. 画出所有具有 6 个顶点的非同构的连通的简单非平面图。

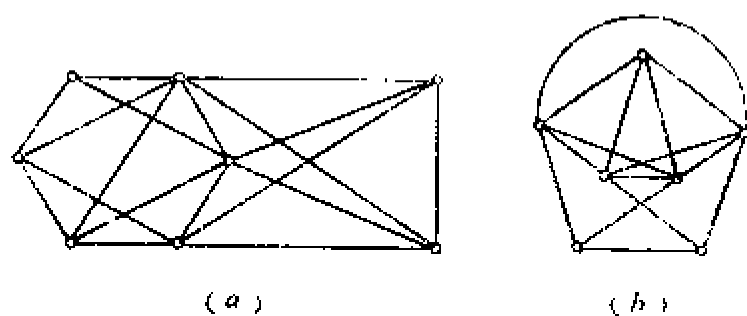


图 101

十三　著名的“四色猜想”难题

——平面图的着色

在图论中，著名的难题之一是“四色猜想”问题。自从1852年英国人古斯里（F.Guthrie）提出这个问题以来，在一个多世纪的漫长岁月里，许多数学家为证明它绞尽了脑汁，然而都没有取得成功。直到1976年，几位科学家在高速电子计算机上花了近1200小时才把它证明出来，使得这个存在了一百多年的“猜想”成为一个定理。

“四色猜想”是怎么一个问题呢？它是说：在一个平面或球面上的任何地图都能够最多用四种颜色着色，使得没有两个相邻的国家或地区有相同的颜色。

为了说明这个问题是怎样解决的，我们先介绍一些有关的知识。

图的着色

所谓图的一个“着色”，是指对图的每个顶点指定一种颜色，使得没有邻接的顶点着同一种颜色。图的一个“n-着色”是对图用了n种颜色的一个着色。使得图有一个n-着色的最小数目n，叫做图的“色数”，一般用希腊字母χ表示。如果图的色数χ是n，就把这个图说成是“n色”的。注意“n-着色”和“n色”并不是同一个概念。

图102给出了同一个图的3种不同的着色。图102(a)、

(*b*)、(*c*)着的颜色分别是2、3、4种，图上顶点所标的不同数字表示不同的颜色。但是这个图的色数χ是2，因为色数指的是着色的最小数目。

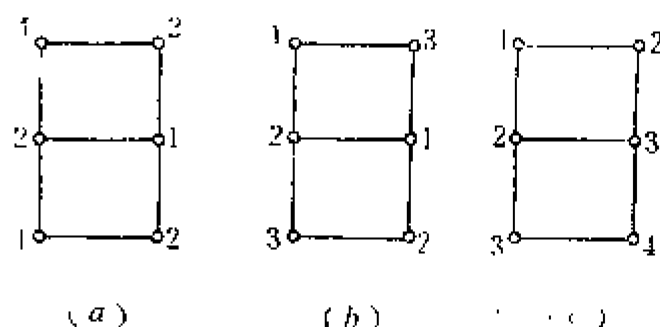


图 102

对于有些特殊类型的图，色数是很容易确定的。例如，对于完全图K_n，$\chi(K_n)=n$。对于树T，有$\chi(T)=2$，而对于仅由孤立点组成的“零图”来说，它的色数是1。

图103给出了这几种图和它们的着色。图103(*a*)是K_4，它的色数是4；图103(*b*)是一棵有6个顶点的树，它的色数是2；而图103(*c*)是有7个顶点的零图，它的色数是1。

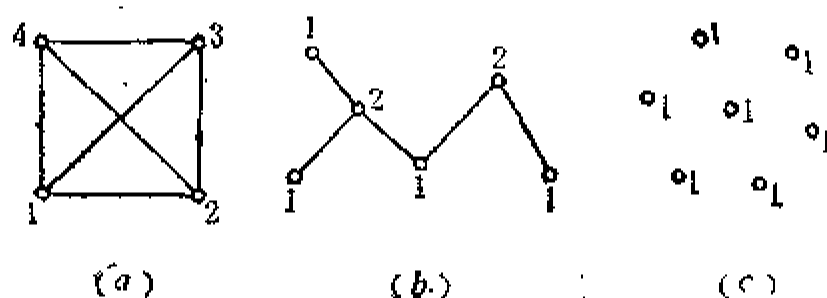


图 103

对于一个色数是n的图，给它的顶点着上n种颜色以后，根据这种着色，可以把图的顶点划分成n个“色组”，使得着同一种颜色的顶点在同一个色组里。如果对于一个n色图，它的每一个n-着色导致顶点的划分都是一样的，那么这样的图就叫做“唯一n-可着色的”或简称它是“唯一可着色

的”。图 104 给出的就是一个唯一 3-可着色图。这个图的色数是 3 。在图 104(a)和图 104 (b)里给出了顶点的两种不同的 3-着色。由这两种着色引起的顶点的划分都是相同的，就是说在这两种着色中着相同颜色的顶点组成的色组都是 $\{v_1\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$。

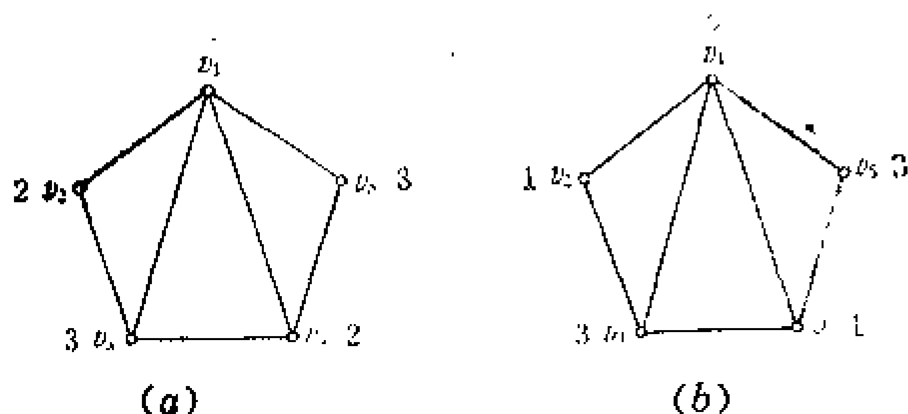


图 104

下面再谈谈对地图的着色。所谓对地图的一个着色，是指对平面上或球面上地图的每一个区域指定一种颜色，使得没有两个邻接的区域着同一种颜色。如果对地图可以用 n 种或少于 n 种的颜色着色，我们就说地图是“n-可着色的”。使地图 n-可着色的最小数目 n，叫做地图的色数，通常也用符号 χ 表示。

在图 105 里，给出了两个地图的着色，图 105(a)图的色数是 2，图 105(b)的色数是 3 。

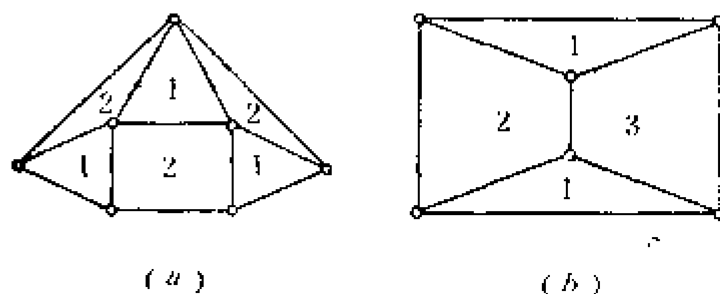


图 105

"四色猜想"问题就是要证明任何一个地图都是4-可着色的。由于球面上的地图可以通过对平面的投影成为一个平面上的地图，而平面上的地图又都可以看成是平面图，所以，要证明任意一个地图是4-可着色的，就可以转变成证明任意一个平面图都是4-可着色的了。

这里可能会产生这样一个问题：根据"着色"的定义，给地图着色是针对图的不同区域来说的，而对平面图着色是针对它的顶点来说的，这两种着色，是一回儿事吗？

我们说，这两种着色，看起来似乎不一样，实际上是一样的。它们之间的关系，是通过"对偶图"联系起来的。

平面图的对偶图

什么是对偶图呢？下面，我们只介绍一种常见的平面图——"多边形图"的"对偶图"。一个"多边形图"就是图的每个有限区域都是封闭的平面图。

一个多边形图的"对偶图"是这样确定的：对于它的每一个区域(包括无限区域)，我们画一个顶点和它对应，这些就是对偶图的顶点，它的个数恰好等于原多边形图的区域数。对于平面图上每两个区域所共有的一条边，我们在这两个区域对应的对偶图的顶点间连一条边，正好和平面图上的这条边相交。这样，就画出了一个多边形图的对偶图，它的边数和原多边形图的边数相等。例如，图106就是一个多边形图和它的对偶图，实心顶点和实线边表示多边形图，而空心顶点和虚线边表示它的对偶图。从图上可以看出：多边

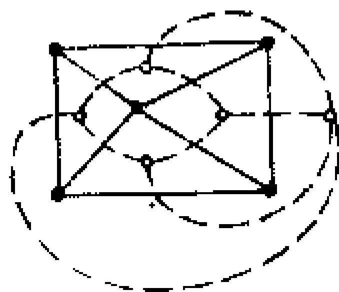


图 106

形图的对偶图也是平面图。

由于对偶图的顶点和多边形图的区域是一一对应的，而对偶图顶点的度数又和它对应的区域的边数相等，也就是说，对偶图顶点的邻接关系正好反映了多边形图区域的相邻关系。这样，如果能证明一个图的对偶图的顶点是4-可着色的，那么这个图的区域当然也是4-可着色的了。由于一般的地图都是多边形图，而其对偶图又都是平面图，所以，如果证明了所有的平面图的顶点都是4-可着色的，那么所有的地图的区域自然是4-可着色的了。

图107给出了两个平面图（同时又是多边形图）和它们的对偶图。图107(a)的区域（包括无限区域）是3色的，它的对偶图的顶点也是3色的。图107(b)的区域（包括无限区域）是4色的，它的对偶图的顶点也是4色的。

这就可以看出地图的着色和平面图顶点的着色是等价的。近几十年来，对地图4-可着色问题的探讨，实际上都是针对对偶图顶点的着色进行的。

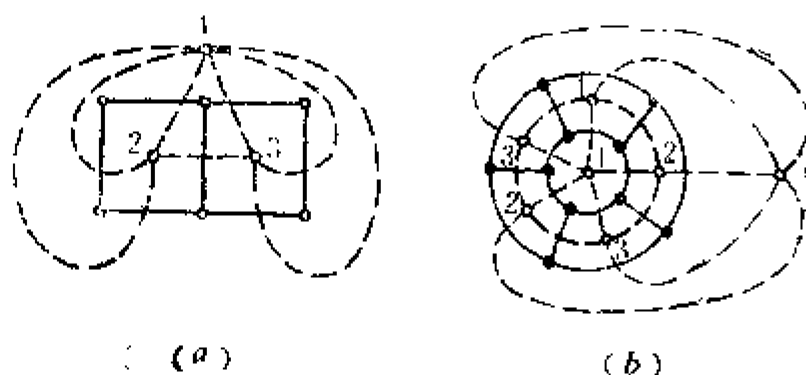


图 107

从猜想到定理

“四色猜想”问题提出之后过了二十多年，在1879年，

伦敦的一位律师兼数学学会会员肯普发表了一篇文章，声称他已经证明了“四色猜想”。他的证明尽管是不完善的，但是采用的方法却极其巧妙，包含了一个世纪之后产生正确证明的大部分基本思想。

肯普试图用古典的归谬法来证明猜想是真的。他先假设猜想不真——就是至少有一幅地图需要着五种颜色，然后再证明由这个假设必然导致矛盾。

肯普是针对“正规地图”进行证明的。所谓“正规地图”是指这样一种地图：图上任何一个国家或地区都是个单连通域，就是同一个国家或地区不能分成两块以上不连接的部分；另外要求任何一个国家或地区都不能包围别的国家或地区，并且没有三个以上的国家或地区相交于一点，也就是说，任何两个国家或地区相邻，它们必须有一条公共的边界线，而不能只相交于一点。

图 108 里给出的几个地图都不是正规地图。在图 108(a)中国家 E 分成了两块，这样，如果要求同一个国家要着同一种颜色的话，那么这个地图就要着五种颜色。图 108(b)的

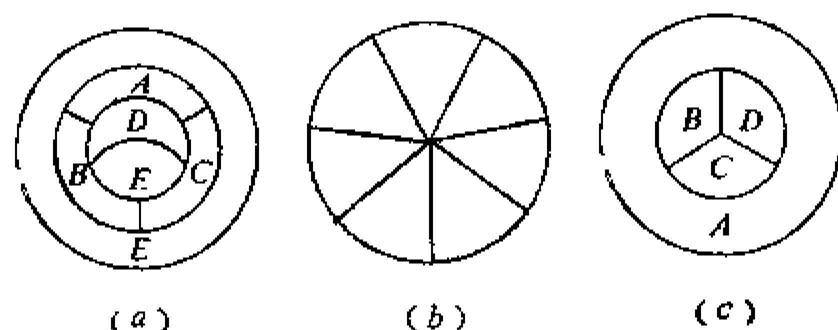


图 108

地图象个馅饼一样被分成 7 个扇形，它们有一个共同的顶点，如果认为它们彼此都是相邻的国家，那么每个国家都需要着和其他 6 个国家不相同的颜色，这样，地图的色数就是 7

了。图 108(c)中国家 A 包围了 B、C、D 三个国家，因此也不是正规地图。

肯普指出：如果存在必须着五种颜色的正规五色地图的话，那么就一定存在"最小正规五色地图"，就是国数最少的正规五色地图。这种地图的特点是：如果从它上面去掉任何一国，它就可以用四种或四种以下的颜色着色了，这样就变成一个 4-可着色的地图。因此，要证明不存在正规五色地图，只要证明不存在最小正规五色地图就行了。那么，怎样才能否定它的存在呢？这就要用到归谬法了。

肯普在证明中所采用的方法是：由假设最小正规五色地图的存在而导致出构形的"不可避免性"和"可约性"的矛盾。

先谈谈什么是构形的不可避免性。

肯普首先证明了在平面上不存在这样的正规地图：它上面的每个国家都至少和六个国家相邻。换句话说，在任何的正规地图上都至少存在一个国家，它或者和二个，或者和三个，或者和四个，或者和五个国家相邻，这种国家之间的邻接关系就组成了所谓"构形"，如图 109 所示。由于任何正规地图上都至少有这四种构形中的一种，因此这些构形就组成了正规地图的"不可避免集"。当然，对于最小正规五色地图来说，这些构形也是不可避免的，就是在每一个最小正规五色地图上，也至少要有这四种构形中的一种。

图 109(a)、(b)、(c)、(d)分别表示一个国家和二个、三个、四个、五个国家邻接的情况。

下一步，肯普接着证明了这四种构形又都不可能出现在最小正规五色地图上，如果其中有一种出现在一个最小正规五色地图上，那么就可以对这个地图重新着色，使得采用的颜

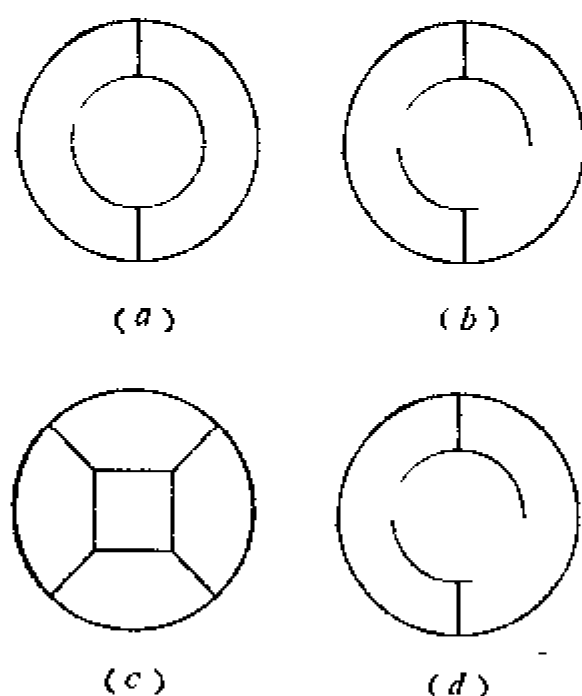


图 109

色最多是四种，这样就否定了原来的地图是个最小正规五色地图。例如，假设一个最小正规五色地图里包含了一个国家和三个国家相邻的这种构形，如图 110(*a*)所示。如果把地图中间的国家D去掉，把它和国家C合并成新国家C'，如图110(*b*)所示，那么根据最小正规五色地图的定义，剩下的部

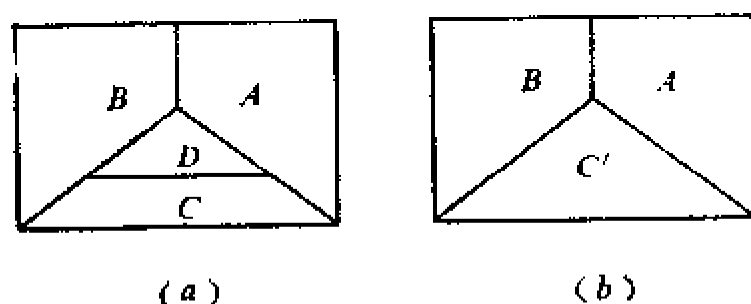


图 110

分最多用四种颜色着色就行了。令国家A、B、C'分别着三种不同的颜色，再把国家D恢复到原来的位置，那么对D

就可以用不同于A、B、C(同C'的颜色)的另一种颜色着色，这样，原来的地图竟然变成是4-可着色的了，这只能说明原来的地图并不是最小正规五色地图，或者说这种构形不能存在于任何最小正规五色地图上，这就是构形的"可约性"。

肯普用同样的方法证明了其他三种构形对最小正规五色地图的可约性(虽然一个证明存在漏洞)，就是它们都不能出现在最小正规五色地图上。

由假设存在最小正规五色地图，而导致了构形的不可避免性(就是在任何正规五色地图上应该至少包含这四种构形中的一种)，同时又导致了构形的可约性(就是在任何的最小正规五色地图上不可能出现这四种构形中的任何一种)，这两个结论存在不可调和的冲突，这只能说明最小正规五色地图不可能存在，这也就否定了任何正规五色地图的存在，并且可以证明"四色猜想"的正确性。

由于肯普的证明中存在漏洞，而这种漏洞在当时又是难以修补的，他没有完成对"四色猜想"的最终证明，但是他提出的构形的不可避免性和可约性的思想，却为以后的人指出了到达终点的正确方向。

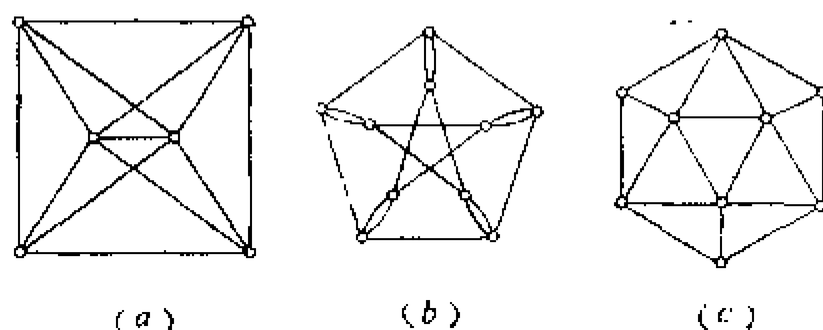
1976年，年轻的美国科学家阿贝尔(1932-)，哈肯(1928-)等沿着这个方向，找出了由大约1500个构形组成的不可避免集，然后再逐个对它们的可约性进行了证明，包括大量的计算和上百万个判断。这样繁重的工作，多亏有了电子计算机的帮助才得以完成。从此，四色问题终于从"猜想"变成了"定理"。

应用电子计算机证明四色定理，不仅解决了图论里一个一百多年没有解决的难题，是图论理论上的一个重大突破，

同时，在电子计算机的应用上也是一个重大的进展，因为这是第一个单靠人没有能够解决而依靠机器才被证明出来的定理。这一创举不仅显示了电子计算机的巨大潜力，并且也展示出电子计算机应用的一个有广阔前景的新方向。

练 习 十 三

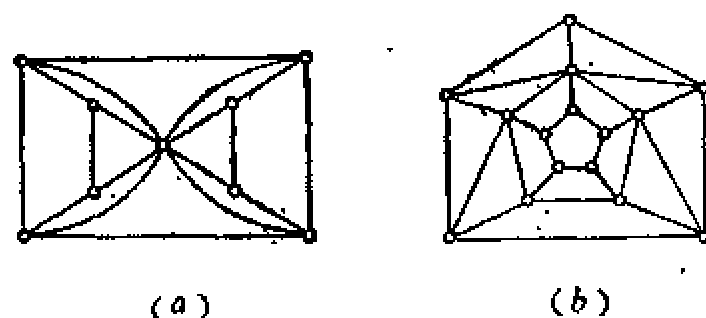
1． 对图(*a*)、(*b*)、(*c*)的顶点着色，各图的色数是多少？



(*a*)　(*b*)　(*c*)

图111

2． 对图 112 (*a*)、(*b*)的有限区域着色，色数各是多少？

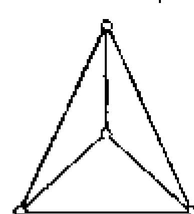


(*a*)　(*b*)

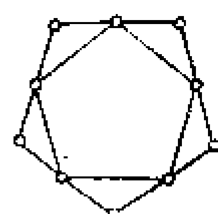
图112

3． 画出图 113 (*a*)、(*b*)、(*c*)的对偶图。

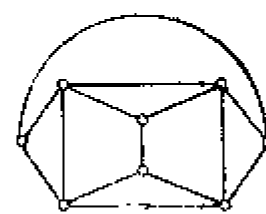
4． 判断图 113 (*a*)、(*b*)、(*c*)的色数和唯一可着色性。



(a)



(b)



(c)

图 113

十四　在图上找捷径

——最短路径问题

图论的思想和方法，在日常生活和生产实践中有广泛的应用。最常见的应用之一，是在两点之间找捷径，就是求最短路径问题。下面，我们通过一个例子来说明什么是求最短路径问题以及怎样求解。

从一个城市到另一个城市的最短路程

图114给出的是一个12个城市之间的交通网。图上每个顶点表示的是一个城市，每条边表示的是两个城市之间的通路，边上的数字表示的是通路的长度。现在，有一个人要从城市 A_1 到城市 C_4 去，问：他应该怎样走，才能使整个行程最短？这就是一个典型的求两点间的最短路径问题。

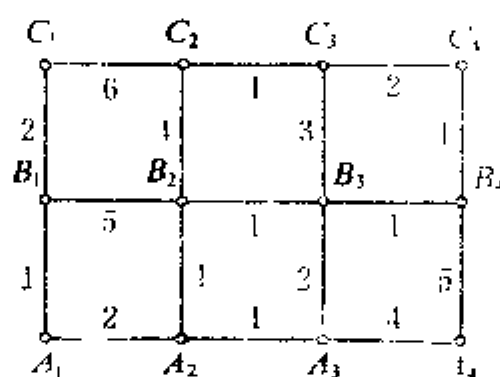
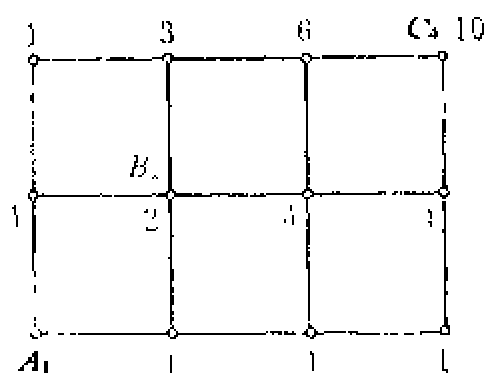


图 114

求解这个问题的方法当然是多种多样的。最容易想到的方法就是把从 A_1 到 C_4 所有可能的通路都找出来，分别计算它们的长度，然后再进行比较，找出最短的一条。由于图114所给出的12个城市间的交通网是四通八达的，因此即使规定每条通路上同一个城市不重复走到的话，从 A_1 到 C_4

的通路也有几十条。从图上我们可以看出，从 A_1 到 C_4 的通路中间至少要经过 4 个城市，如果我们仅仅把从 A_1 到 C_4 的只经过 4 个城市的通路都挑出来，那么这样的通路也有10条。

图 115 上每个顶点上的数字就表示的是从 A_1 到这点所经过的城市最少的通路的条数。例如，从 A_1 到 B_2 的通路至少要经过 1 个城市（A_2 或 B_1），而从 A_1 到 B_2 只经过 1 个城市的通路有 2 条。这样顺次推下去，A_1 到 C_4 经过最少城市（4 个）的通路共有 10 条。即使把这 10 条通路的长度各自计算一遍，也需要不少时间。因此我们可以看出，上面所说的这种求两点之间最短路径的方法，虽然是比较直观的，可行的，却是麻烦的。


图 115

有没有更简便一些的方法求解这个问题呢？答案是肯定的，并且方法也还不止一种。

一种求最短路径的算法

下面，我们给出一种求解这类问题的算法。我们先给出这个算法的步骤，然后再结合上面的例子，说明这个算法怎样使用。

求解两点之间最短路径的算法如下：

第一步，把图上的顶点分做两部分：T 和 P，T 和 P 就是两个集合。先令通路的起点 x_0 归在集合 P 里，把只有 x_0 一个元素的集合 P 记作 P_0，就是说有 $P_0=\{x_0\}$。而剩下的顶点

都归在集合T里，把这个集合记作T_0，就是$T_0=V-P_0$，V是所有顶点的集合。

第二步，从T_0里找出那些和顶点x_0相邻的顶点，计算它们各自到x_0的距离，然后选出和x_0距离最近的一个顶点x_1，把x_0和x_1之间的通路标出。如果和x_0有最近距离的最顶点不止一个，就任选其中一个。

第三步，把顶点x_1扩充到P里，记作P_1，得到$P_1=\{x_0, x_1\}$，而剩下的顶点组成T_1。

第四步，然后在T_1里找到那些和x_0或x_1邻接的顶点，从这些顶点中选出一个和x_0距离最近的顶点x_2，把x_0到x_2的通路标出。再把顶点x_2扩充到P里组成P_2，而剩下的顶点组成T_2。

重复以上步骤，直到在某一步找到的在T_i里的顶点x_{i+1}（$i\geq0$）正好是我们所求的路径的终点为止。这时所标出的x_0到x_{i+1}的通路就是它们之间的最短路径。

现在，我们就用这个算法，求解图114里顶点A_1到C_4的最短路径。

为了叙述上的简便，我们把整个求解过程用一个表格的形式给出。我们用表格里的第i行表示第$i+1$次应用算法后的结果($i\geq0$)，这里P_i、T_i、x_{i+1}如算法所给的定义，而l_{i+1}表示的是顶点x_{i+1}到起始顶点（这里就是顶点A_1）的最短路径的长度。

和表格相应的图如图116所示，其图里所注第（i）图对应表格第i行。

图116里的第（i）图，只给出了找到第$i+1$个顶点时候所走过的路径，而没有走到的路径，图上都没有标出来。从图上我们会发现，在应用这种算法求解过程中所走到的某

i	P_i	T_i	x_{i+1}	l_{i+1}
0	$\{A_1\}$	$\{A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4\}$	B_1	1
1	$\{A_1, B_1\}$	$\{A_2, A_3, A_4, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4\}$	A_2	2
2	$\{A_1, B_1, A_2\}$	$\{A_3, A_4, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4\}$	A_3	3
3	$\{A_1, B_1, A_2, A_3\}$	$\{A_4, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4\}$	C_1	3
4	$\{A_1, B_1, A_2, A_3, C_1\}$	$\{A_4, B_2, , B_3, B_4, , C_2, C_3, C_4\}$	B_3	5
5	$\{A_1, B_1, A_2, A_3, C_1, B_3\}$	$\{A_4, B_2, , B_4, C_2, C_3, C_4\}$	B_4	6
6	$\{A_1, B_1, A_2, A_3, C_1, B_3, B_4\}$	$\{A_4, B_2, C_2, C_3, C_4\}$	B_2	6
7	$\{A_1, B_1, A_2, A_3, C_1, B_3, B_4, B_2\}$	$\{A_4, C_2, C_3, C_4\}$	C_4	7

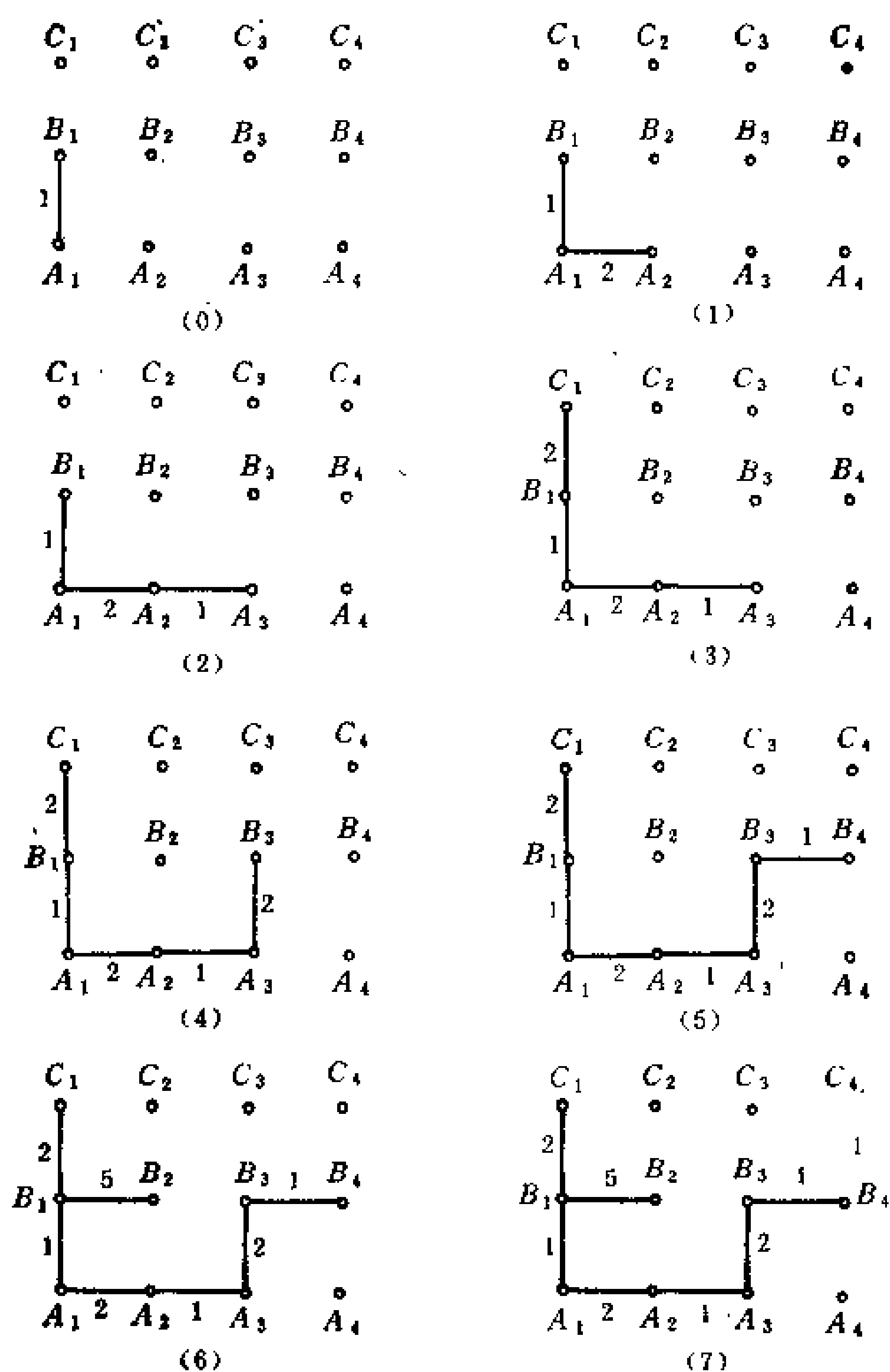


图 116

些顶点，例如顶点C_1和B_2，它们并不在A_1到C_4的最短路径上，那么为什么还要走到这些顶点去呢？这是因为它们和A_1的顶点之间的距离都比C_4和A_1的近，所以根据算法步骤，它们都在C_4之前进入到P_5里。

由此可以看出算法的机械性：只要算法步骤给定了，就只能严格按照算法的规定一步一步进行，不能作随意的改动。这样，在按照算法求解的过程中，往往会走出一些"多余的"步。然而，另一方面，正由于算法步骤的机械性，因此可以把它编成程序让计算机执行。

当然，在实际用算法解最短路径问题的时候，并不一定要列出详细的表格和画出很多相应的图，而只要在所给出的要求最短路径的图上，直接把每用一次算法所走到的顶点和路径顺序标出来就行了，这个过程一直进行到走到终点为止。这时，从起点到终点的路径就是我们所求的它们之间的最短路径。

巡回售货员的最短回路

现在，我们再提出另一个有关路径的问题：图 117 表示的是一个有 5 个销售点 a、b、c、d、e 的交通网络，各边上标明的数字是两地之间的距离。问：一个售货员从 a 地出发，怎样走才能找到一条最短的路，把所有的销售点都恰好走过一遍后回到 a？这个问题，就是著名的"巡回售货员问题"，实际上就是求一个图的最短哈密顿回路的问题。对于这类问题，到现在还没找到

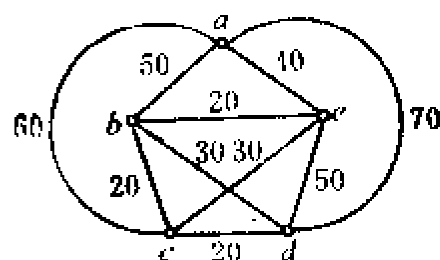


图 117

一种比较简单的、有效的方法（不是把所有可能的回路都走过一遍后再作比较的方法），来求得最佳结果。不过，当前已经找到了几种可以求得近似于最佳结果的方法。在这里，我们介绍最简单的一种方法——"最邻近法"。

我们先约定：求最短哈密顿回路的图都必须是完全图。下面结合图 117 给出最邻近法的算法步骤：

第一步，对于图里已经确定的起点，例如 a 点，在图上找一个距离 a 最近的顶点，例如 e 点，选取 a、e 之间的边（a，e），形成一条初始通路。

第二步，然后再从不在边（a，e）上的其他顶点之中，找一个和 e 距离最近的顶点，例如 b 点，选取边（e，b），扩充到初始通路里来。下面再对 b 点重复这一步，直到图上所有顶点都逐个进入到一条通路里。

第三步，最后选取起点和终点（最后进入通路里的一点例如 d 点）之间的一条边，于是就形成了一条回路——这就是用算法所求的图的最短哈密顿回路。

用最邻近法求图 117 里巡回售货员最短回路的具体步骤，如图 118 所示。从 a 点出发，顺次经过顶点 e、b、c、d 后又回到 a 点，整个回路的长度是 170。

用最邻近法求得的最短哈密顿回路往往和原图里实际的最短哈密顿回路是有误差的。一般说来，当图的顶点越多的时候，误差上限也就越大，而当顶点比较少的时候，误差上限也就小。整个来说，用最邻近法求得的回路长度和实际最短回路长度之间的误差，有时比较大，有时比较小，有时甚至没有误差。例如在本题里，图 117 实际上的以 a 点作为起点和终点的最短哈密顿回路也是 170，和最邻近法求得的结果一样。

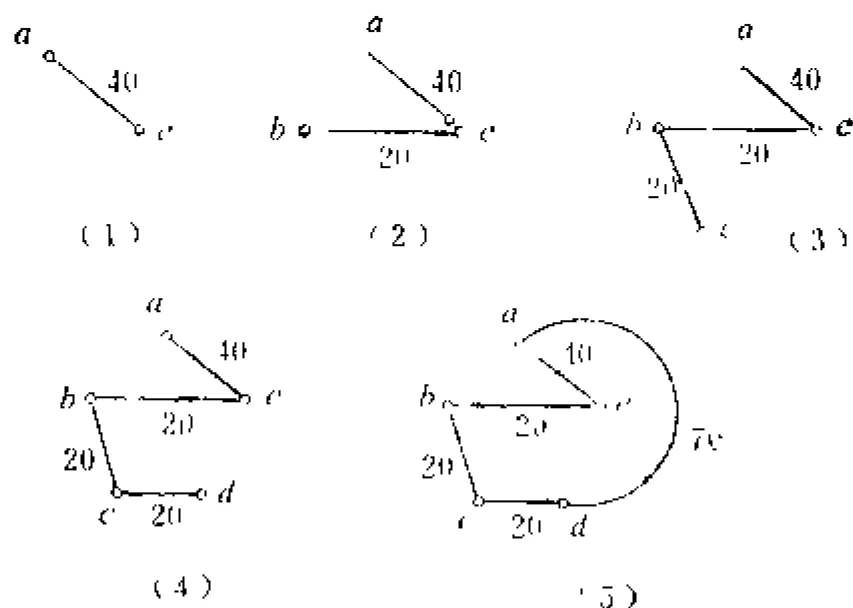


图 118

跟实际值有误差的算法是“非确定性算法”，而最邻近法就是一种非确定性算法。

练 习 十 四

1． 试求出图 119 里顶点 a 到顶点 z 的最短路径，计算它的长度。

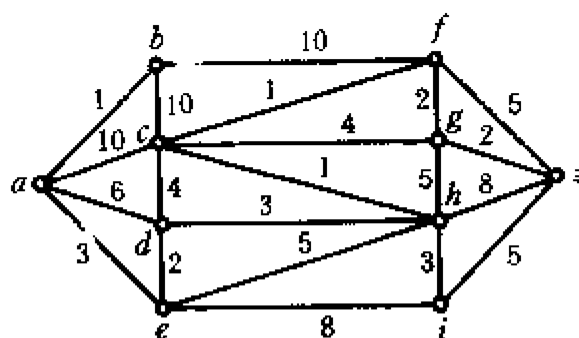


图 119

2． 试求出图 120 里顶点 A_1 到顶点 C_4 的最短路径，计

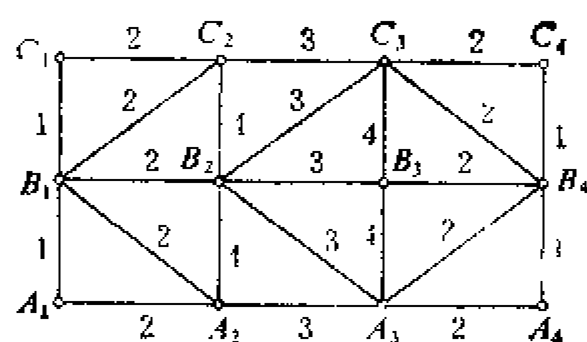
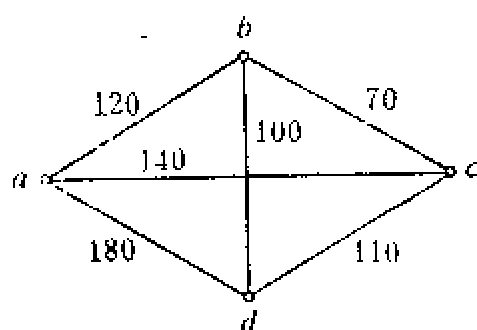


图 120

算它的长度。

3. 用最邻近法求图 121 里以 a 作为起点和终点的最短哈密顿回路，并且和实际上的最短哈密顿回路进行比较。



121

十五 智力游戏中的图

——偶图和对策

我国和世界各国都有许多传统的和新颖的智力游戏，有些智力游戏可以应用图论的方法来求解。

下面我们举个农民过河的古题作为例子。

农民过河的古题

在八世纪的作品里有这样一个古老的题目：一个农民带了一只狗、一只羊和一颗白菜来到河边准备过河。岸边有一只小船，只允许农民每次带一样东西渡河。如果农民把狗和羊留下，狗就要咬羊；如果把羊和白菜留下，羊就会吃白菜。问农民应该怎样渡河，才不会发生麻烦？

这是一个很有趣的智力游戏，也不难求得答案。现在，我们准备介绍怎样用图论的方法——一种形式化的方法来解答这个问题。

先找出农民(人)、狗、羊和菜这四者之间各种允许的搭配状态，共有9种，再加上岸上什么也没有这种状态(用“0”表示)，共有10种。用10个顶点v_1到v_{10}和v_1'到v_{10}'对应这10种不同的状态，如图122所示，在图里重复排成左、右两列，分别表示河的左、右两岸所允许的搭配状态。我们设农民开始在左岸。

然后，再画图上的边。如果左岸的一个状态经过农民一

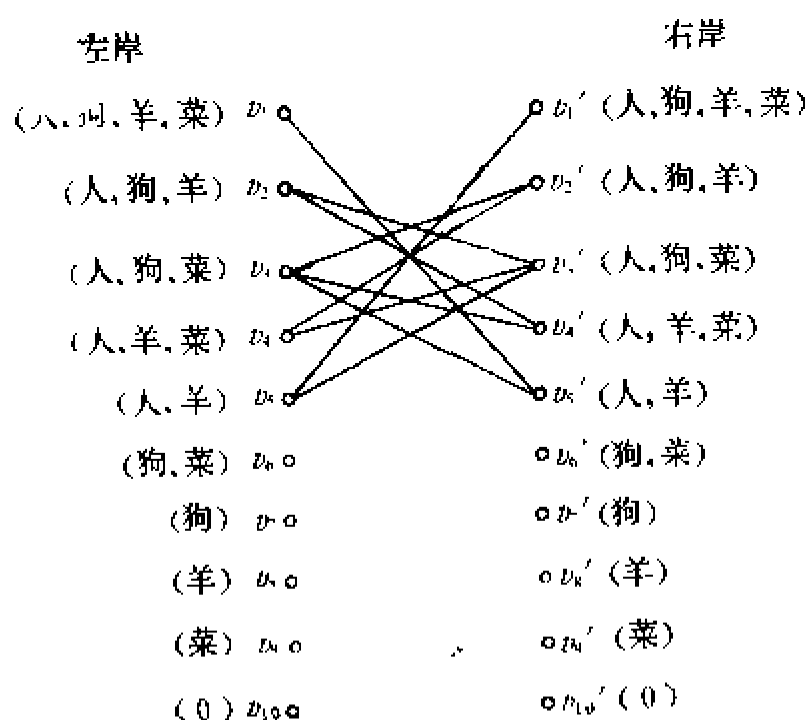


图 122

次渡河后能转换到右岸的某一个状态，我们就在这两个状态对应的顶点之间连上一条边。例如，如果农民带一只羊从左岸渡到右岸，我们就可以在左岸的状态 v_1（人、狗、羊、菜）和右岸的状态 v_5'（人、羊）之间连一条边。我们从左岸顶点 v_1 开始，逐个地和右岸有关的顶点之间连上边（如果有的话），一直扫描到顶点 v_{10} 为止，这样就得到了图 122，这里包括没有边关联的孤立顶点 v_6 到 v_{10} 和 v_6' 到 v_{10}'。

这个图是个典型的“偶图”。“偶图”是这样一种图：它的顶点可以分成比如 A、B 两组，这两组之间没有公共的顶点，如图 122 里 v_1 到 v_{10} 和 v_1' 到 v_{10}' 这两组顶点；另外，偶图里每条边所关联的顶点，都是一个顶点在 A 组里，一个顶点在 B 组里。也就是说，边只存在于不同组的顶点之间，而同一组的顶点之间没有边关联。例如在图 122 里，各边关联的顶点都是一个在左岸，一个在右岸，而没有一条边所关联的顶点都

在左岸或右岸。

图 122 里两组顶点的个数恰好相同，这不过是一种巧合，一般说来，偶图里两组顶点的数目并不一定相等，这要根据实际问题来确定。

现在，我们继续讨论农民过河的问题。农民原来在左岸，要过到右岸去，从状态转换的角度来看，就是从左岸的 v_1 开始，经过一系列状态的转换，而最终到达右岸的 v_1'。因此，现在的问题就变成了：能否在图里找到一条以 v_1 作为起点、以 v_1' 作为终点的通路？从图 122 可以看出，这样的通路是存在的，并且不止一条，如图 123 所示。

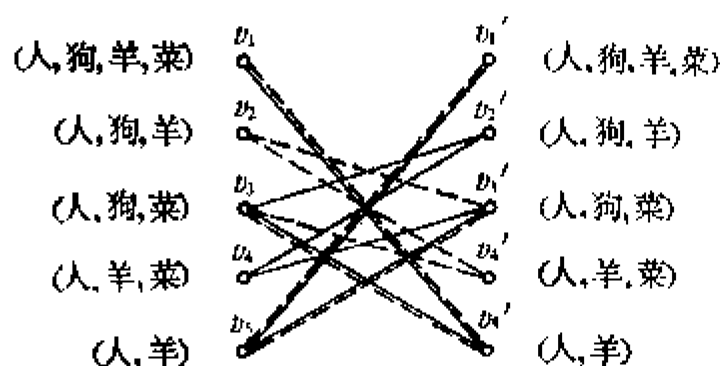


图 123

图123里分别用实线和虚线画了两条从 v_1 到 v_1' 的通路(图上略去了和通路无关的孤立点)。这样，如果农民按照其中一条通路上各顶点的顺序，在两岸之间来回摆渡七次，就可以把，狗、羊、白菜都送到对岸，又不会发生任何麻烦。

当然，对于这个问题，我们也可以不采用偶图的方法，而采用另一种更加简单的图解法。可以这样确定图上顶点所对应的状态：我们把同一时刻左、右岸的状态看成同一个状态。例如，当四者都在左岸的时候，右岸什么也没有（用“0”表示这种情况），于是这时的状态就是(人、狗、羊、

菜；0），括号里分号左边表示左岸的状态，分号右边表示右岸的状态。再如，如果左岸是狗、菜，右岸是人、羊，这时的状态就是(狗，菜；人、羊)。这种"整体"上的状态一共有10个，分别用顶点v_1到v_{10}和它们对应，如图124所示。图里边的画法和偶图里边的画法是一样的，就是，两个状态之间经过农民一次过河后可以互相转化的话，就在这两个状态对应的顶点之间连一条边。

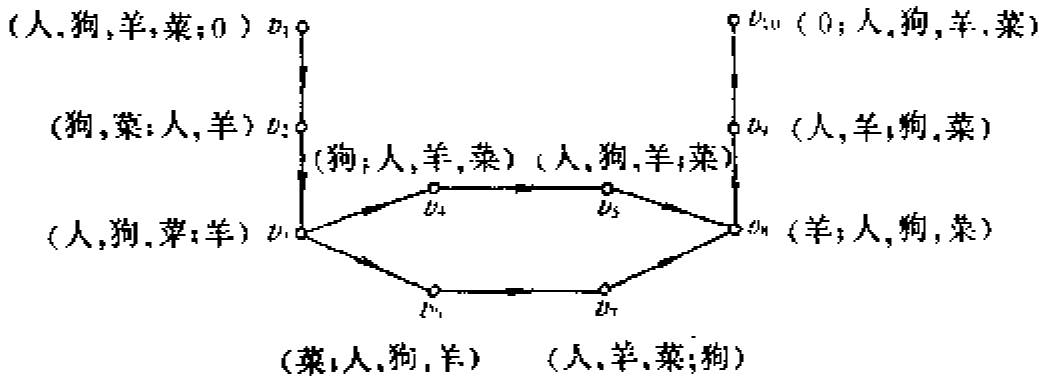


图 124

于是，问题又变成在初始状态v_1和最终状态v_{10}之间找一条通路。从图124里看出：这样的通路显然存在，并且有两条。当渡河的起点和终点已经确定，也可以把图画成有向的，这样，整个通路上各顶点的顺序性就更清楚了。

以上所采用的图解的方法，都是一种"形式化"的方法。也就是对于这一类问题，无论它怎样千变万化，只要按照上述几种方法所规定的步骤，先把它转化成一个图，然后在图里找一条从起点到终点的通路，问题总是可以解决的。

说这种方法是"形式化"的，还体现在画图的时候，按照已知条件和规定的方法，要一步步地把对应的顶点和边都画出来，而不管画出的顶点和边跟最后得到的结果是否都有关系，例如图122里的孤立顶点v_6到v_{10}和v'_6到v'_{10}都跟

解无关。另外，在画边的时候，不管各顶点和对岸的顶点是否有边关联，都要逐个扫描一遍。形式化的方法虽然看起来比较机械、死板，缺乏灵活性，却是行之有效的方法，因为采用这种方法，总是能得到最后所需要的结果的。对于一个复杂的问题，也许你一时缺乏“灵感”，而想不出什么捷径来，但是，如果你知道了一种形式化的方法，虽然也许要烦琐、死板些，也照样能把它解出来。即然能把问题解出来，也就不管是凭“灵感”还是凭掌握某种解题方法了。所以，从某种意义上来说，形式化的方法缩小了人们智力上的差距。

在电子计算机飞速发展的今天，形式化的方法更占有突出的地位，因为它是机器“思维”的基本方式，只有把问题编成形式化的程序后，机器才能接受；才能机械地执行程序所给的指令，才能对问题作出解答。所谓解决一类具体问题的形式化方法，实际上就是这类问题的“算法”的体现，而对于算法，我们已经打过多次交道了。

课程巧安排

我们再来看这样一个问题：计算机系教学主任准备安排四位教师张、王、李、赵去教四门课：数学、程序、电路和计算机原理。已知张老师能教程序和电路，王老师能教数学和计算机原理，李老师能教数学、程序和电路，赵老师只能教电路。问应该怎样安排，才能使每门课都有教师教，并且每位教师都能教一门胜任的课程？

我们还是采用偶图来解这个问题。

设四个顶点v_1、v_2、v_3、v_4对应四位老师张、王、李、赵，作为偶图的第一组顶点。再设四个顶点u_1、u_2、u_3、u_4对应四门课程，作为偶图的第二组顶点。现在找两

组顶点间的关系：在各位老师和他们能教的课程之间连上边，于是就得到了图 125（a）。

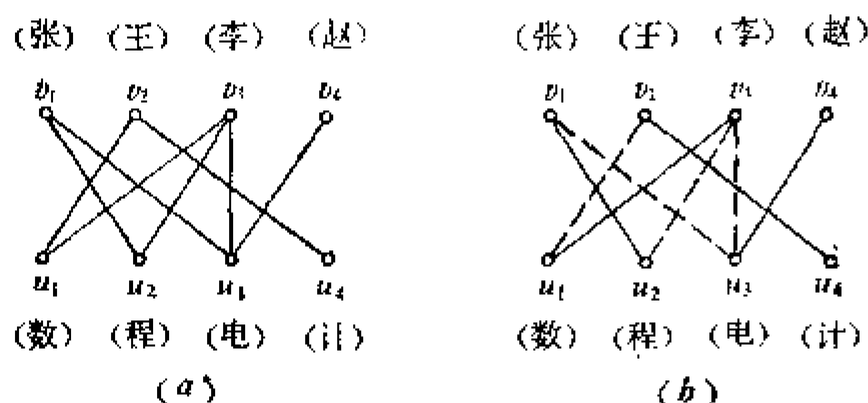


图 125

图 125（a）也是个偶图，它的每条边关联的两个顶点，都是一个顶点对应教师，一个顶点对应课程。如果在图上能找到这么四条边：它们恰好对应四位教师和四门不同的课程，那么课程分配方案就得出来了。我们先从度数是 1 的顶点看起，比如从顶点 u_4开始，由于 u_4只有一条边和其他顶点相关联，所以这条边必然要被选中。u_4的这条边是连到顶点 v_2的，因此，在选中了边（v_2，u_4）后，和 v_2关联的另一条边（v_2，u_1）就要舍去，因为一位教师只能安排一门课程。去掉(v_2，u_1)这条边后，顶点 u_1只剩下和 v_3关联的一条边了，因此（v_3，u_1)这条边一定要被选中，否则 u_1对应的数学课程就会没人教了。按这方法，逐步推导下去，最后就得到了如图 125（b）里用实线画的四条边。这就是所要求的课程分配方案：张老师教程序，王老师教计算机原理，李老师教数学，赵老师教电路。

四位教师和四门课程之间的这种搭配关系，也就是图 125（b）里实线边所表示的第一组顶点 v_1到 v_4和第二组

顶点u_1到u_4之间的这种一一对应关系。象这样第一组里不同的顶点和第二组里不同的顶点对应，叫做偶图两组顶点间的一种“匹配”。表示这种匹配关系的边，如图 125（*b*）里的 4 条实线边，就叫做偶图的“匹配线”。

是否所有的偶图两组顶点之间都存在匹配呢？回答是否定的。请看图 126，它也是个偶图，但是由于它第一组顶点中的两个顶点v_1和v_2都只和第二组顶点中的同一个顶点u_1邻接，使得两组顶点间找不到那种一一对应关系，因此这个偶图不存在匹配。

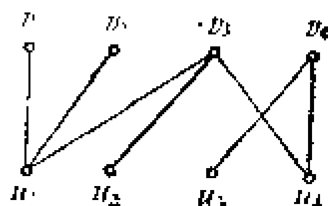


图 126

如果偶图的两组顶点数不相等，我们一般所说的匹配，主要是着眼在第一组顶点。也就是说，这时只看第一组的每个顶点能否找到第二组的不同顶点和它对应。如果第一组顶点数大于第二组顶点数，那么偶图必然不存在从第一组顶点到第二组顶点的匹配，这是因为第一组中至少有两个顶点要对应到第二组中同一个顶点上去。只有当第一组顶点数小于或等于第二组顶点数的时候，才有可能从第二组顶点中找到若干个不同的顶点和第一组顶点一一对应。

那么，到底在什么情况下偶图才存在匹配呢？

下面给出两个判断偶图是否存在匹配的定理。

首先需要说明一点：我们这里的偶图都是简单图，就是图里没有平行边，当然更不会有环。

第一条定理是：一个偶图，当且仅当它的第一组顶点中每k个顶点（k是不大于这组顶点总数的自然数）至少邻接到第二组顶点中的k个顶点的时候，它才有一个从第一组顶点到第二组顶点的匹配。这个条件又叫做“相异性条件”，是判断

匹配存在的充分必要条件。

第二条定理是：一个偶图，如果它的第一组顶点中每个顶点至少关联 t 条边（t 是一个不大于第一组顶点总数的自然数），而它的第二组顶点中每个顶点最多关联 t 条边，那么这图存在一个从第一组顶点到第二组顶点的匹配。这是一个判断匹配存在的充分条件，但不是必要条件。

我们举个例子来说明定理的应用。

有5个学术委员会，想分别从5位学者中邀请1位学者担任委员会主任，而每个委员会主任只能从本委员会的成员中选择。已知每个委员会至少有这5名学者中的3名学者参加，又知道每个学者至多参加了3个委员会，问委员会的人选是否能顺利解决？

令5个顶点对应5个学术委员会，作为偶图的第一组顶点；用另外5个顶点对应5位学者，作为偶图的第二组顶点。在学者和他参加的委员会之间连边。由于这个偶图的第一组顶点中的每个顶点至少关联3条边，而第二组顶点中的每个顶点至多关联3条边，选取 $t=3$，根据第二条定理，这个偶图是存在从第一组顶点到第二组顶点的一个匹配的，也就是说，5个学术委员的主任人选问题是能够顺利解决的。

由第二条定理可以进一步明确的一点是：如果一个偶图，它的第一组顶点中每个顶点恰好和 t 条边关联，而它的第二组顶点中每个顶点也恰好和 t 条边关联，那么匹配也是存在的，这里就不再举例说明了。

对弈中的制胜之道

智力游戏中存在着大量的两人对弈，如下象棋、围棋等。在对弈中，对每个人来说，都存在起始布局、得胜布局

或和局以及允许棋步等。所谓“对策”就是找一条从起始布局经过一系列允许棋步和中间布局到达得胜布局的通路。现在，我们就一种比较简单的“火柴游戏”来说明怎样利用偶图找一条这样的通路。

问题是这样的：一堆火柴有 10 根，选手 a 和 b 轮流取火柴，每次只能取 1 根或 2 根，但是不能不取。哪个选手取到最后 1 根就算得胜。问：应该怎样取才能取胜？

我们作一个相应的偶图来解这个问题。

a、b 两选手各自面对的可能布局，就是火柴根数，共有 0 到 10 这 11 种。在图 127 中我们用两排顶点，每排11个，来对应这些布局，设上面一排顶点是选手 a 所对应的布局，下面一排是选手 b 所对应的布局。

下一步再确定偶图的边。如果选手 a 从某个布局走了一步后，可以到达 b 的一个布局，就在这两个布局对应的顶点之间连一条边。同样，如果 b 从某个布局出发，走一步后可以到达 a 的某个布局，就在这两个布局对应的顶点之间也连上一条边。例如，假如 a 先走，他所面临的布局是“10”，那么，如果他取 1 根火柴，就可以走到 b 的“9”这个布局，也就是使 b 面临“9”这种布局；如果 a 取 2 根火柴，就可以走到 b 的“8”这种局面。因此，在 a 的“10”和 b 的“8”、“9”之间，要各连上一条边。这里的一条边就对应一个“允许棋步”。假如 b 先走，也同样可以连上一系列的边。

采取以上的步骤，我们可以得到如图 127 所示的一个偶图。

现在，求得胜对策的问题就变成了求偶图中一条从起始布局到得胜布局的通路了。在这个图里，b 的“0”是 a 的最终得胜布局，而 a 的“0”是 b 的最终得胜布局。如果 a

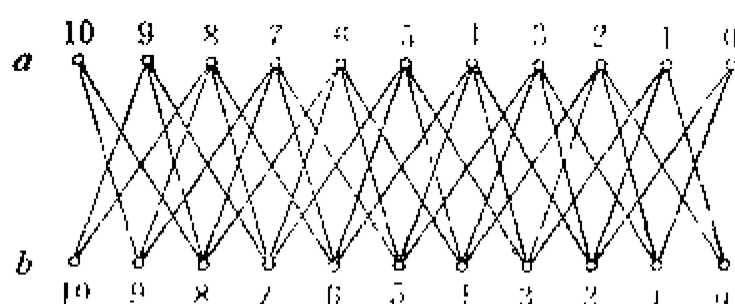


图 127

是最后的胜利者，他的起始布局到底是 a 的“10”还是 b 的“10”，就是到底是 a 先走还是 b 先走，这要经过一步步分析才能确定。整个分析的过程，是由一方最后的得胜布局开始，顺藤摸瓜，由后向前找通路，直到确定起始布局也就是谁先走为止。

下面我们就以 a 作为得胜者，结合图 127，说明这条道路的找法。

如果 a 取得了胜利，就是他拿走了最后 1 根火柴，那么这时 b 就处在“0”这种局面，这个布局是 a 的得胜布局，同时也是 b 的失败布局，我们就从这一步开始往回推。要使 b 最后处在“0”，在前一步，a 必须处在“1”或“2”这两种布局之一才行，而要保证 a 能处在“1”或“2”这两种布局之一，那么再前一步，b 只有处在“3”这种布局才行，这时，无论 b 怎样取火柴，他都免不了要遭到最后的失败。而要使 b 处在“3”这种布局，那么在前一步，a 又必须处在“4”或“5”这两种布局之一才行。这样往回推下去，直到走到 a 的“10”这个布局为止。为了看得清楚起见，我们把在找通路的过程中所用到的边和偶图的所有顶点另外画在图 128 里。

从图 128 看出，a 要取胜的话，他必须先走，并且第一步只能拿 1 根火柴，使 b 面临“9”这种局面，然后再使 b 顺

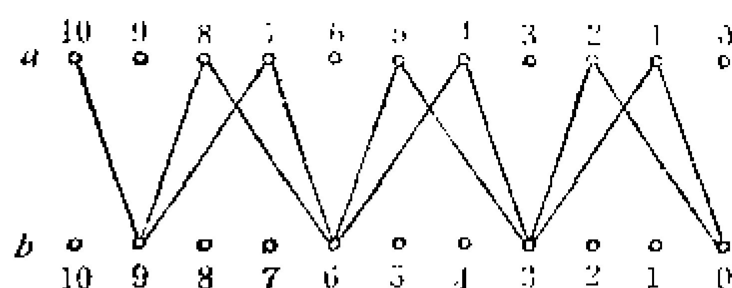


图 128

次面临“6”、“3”这两种局面，这样最后的胜利一定是属于 *a* 的。图 128 里从 *a* 的“10”（初始布局）到 *b* 的“0”（得胜布局）之间的一条通路，就是 *a* 取胜的一种走法。对于 *a* 来说，他面临的得胜的布局是：10、8、7、5、4、2、1；而对 *b* 来说，他面临失败的布局是：9、6、3，这里没有和局布局。当然，如果 *b* 先走，并且总把失败布局 9、6、3 留给 *a* 的话，取胜的就会是 *b*。

在火柴游戏中，是否总是先走的取胜呢？

我们再看看下面这个问题：一堆火柴有15根，玩法同上，问怎样走才能取胜？

我们用同样的方法来作一个偶图，并且用同样的方法找一条 *a* 取胜的通路，通路如图 129 所示。

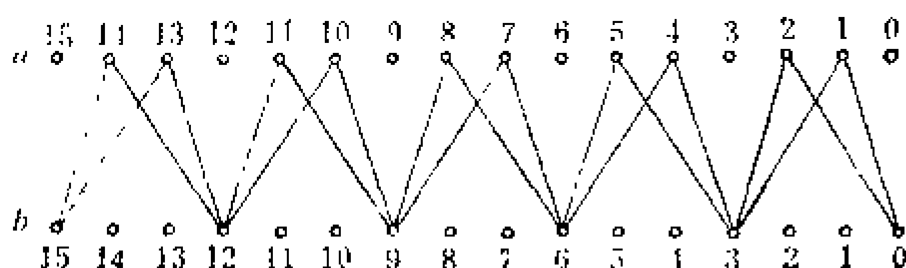


图 129

从图上看出，如果想让 *a* 取胜，那么他不能走第一步，而要让 *b* 先走才行。不论 *b* 第一次取 1 根还是 2 根火柴，只要

a 顺次把 12、9、6、3 的局面留给 b，a 就一定会取胜。

把问题再改动一下：有两堆火柴，一堆有 40 根，另一堆有 35 根。a、b 两人轮流取，每次只能从一堆里取，可以取 10 以内的任意根数，但是不能不取。谁取到最后剩下的根数不超过 10 的一堆火柴，谁就胜。问怎样才能取胜？

这个问题当然也能作图来解，不过太麻烦了，我们这里给出另一种解决问题的方法。如果 a 想取胜，他必须先取，并且应该从 40 根的那堆火柴里取走 5 根，这样，就剩下两堆根数相等的火柴给 b 了。这时，不论 b 从哪一堆里取，取走多少根，a 在下一步都从另一堆里取走相等的根数，这样，就又把根数相等的两堆火柴留给 b 了。这样下去，直到最后 b 取走其中一堆（比如这时每堆只剩下 1 根，那么 b 不得不取走一堆），剩下的另一堆火柴（根数不超过 10）就留给 a 了，a 把它们全取走，于是 a 必然取胜。在这个问题里，关键的步骤是把根数相等的两堆火柴留给对方，那么先走的就一定取胜。

从以上这几种火柴游戏来看，好象两人对弈这类游戏，似乎都有一种固定的走法，事先由谁先走谁后走就能确定谁输谁赢。对于十分简单的对弈来说，由于各种布局和允许棋步种类比较少，这种"未下先知"的情况是可能的。然而，对于十分复杂的对弈来说，由于各种布局的数目繁多，各布局之间的关系又错综复杂，因此要想预先确定一条必胜的通路是十分困难的，几乎是不可能的。例如，对于围棋来说，它的布局的种类大约是 1.7×10^{172} 种，这在有限的时空里，是无法用作图的方法或其他方法来事先求出必胜的对策的。所以在实际下棋的时候，尽可放心大胆地走，不必过多考虑谁先谁后的问题，因为这和最后的取胜几乎没有什么必然的联系。

练习十五

1. 某人要携带一只羊和两捆草过河。渡船每次只能载一个人和一样东西过河。如果把羊和一捆草留下，羊就会吃草。问这个人应该怎样安排过河？

*2. 三个女孩子和各自的父亲来到河边准备过河。河边只有一只小船，每次最多乘两个人。由于三个女孩子出了个淘气的主意：每个人不能在和自己的父亲分开的时候而和别人的父亲一起乘船或待在岸上，这样使渡河的情况变复杂了。但是三位父亲还是想了个办法，既满足了女孩子们的淘气主意，又渡过了河。这个渡河办法是怎样的呢？（说明：每个人都可以自己单独划船）

*3. 一个密码锁有3个红扳键和3个黑扳键。关上的时候6个扳键都在上方。如果把6个扳键都扳到下方，那么锁就打开。沿同一方向（由上往下或相反）每次至多可以连续扳两个键，然后改变方向，否则要报警。无论在上方或下方，如果有红色键，那么个数不得少于黑色键，否则也报警。问应该怎样开锁？

4. 星期一上午有四节课：语文、数学、地理、体育。语文老师第三节课有事，数学老师第一、第四节课不在，地理老师第一、第二节课要准备绘制挂图，体育老师前三节课要准备运动会事宜。问怎样安排课程表，才能在各位老师有时间的时候上课？

5. 有n个小伙子和n个姑娘参加舞会。已知每个小伙子至少认识2个姑娘，而每个姑娘至多认识2个小伙子。证明：可以把所有参加舞会的小伙子和姑娘分成n对，使得每一对舞伴中的小伙子和姑娘是彼此认识的。

6. 某杂志社发表了10个题目征求答案。读者寄来答案后，编辑部对每个题目挑出了2份答案以备选用。后来发现：这20份答案正好是10个读者提出的，并且每个人正好提供了2个不同问题的答案。证明：编辑部可以这样发表答案：每个题目的答案发表一种，并且使得10个读者中每一个人恰好对其中一个问题作了解答。

7. 两个箱子分别装有65个和50个球。甲、乙两人轮流从箱子里取球，每次可以从任一个箱子里取任意多个球（当然不会超过箱子里球的总数），但是不能不取。谁取到最后的球谁就胜。问怎样取球才能取胜？

8. 三堆火柴，每堆10根。甲、乙两人轮流取火柴，每次只能从一堆里取，可以取任意根，谁取到最后的火柴谁就胜。问应该怎样取才能取胜？

9. 20根火柴，甲、乙两人轮流取。每次至多拿4根，至少拿1根。谁取到最后的火柴谁就胜。问应该怎样取才能取胜？

***10.** 有一种游戏叫做"抢100"。甲、乙两人轮流依次报数，从1报起，报的数个数限在10以内，但是不能是0。前一个人报到某数，后一个人就从下一个数接着报下去，谁先报到100谁就赢。问怎样报数才能取胜？

练习题答案

练 习 一

1. 见图 130。

2. 见图 131。

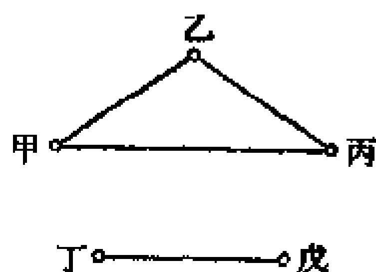


图 130

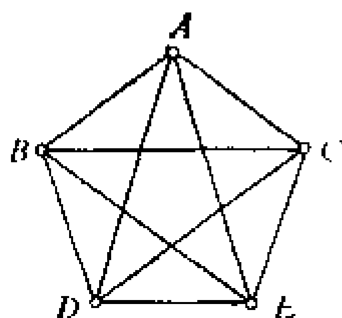


图 131

说明：A 和 D 之间虽然没有直达班机，但是由于 A 和 B 之间、B 和 D 之间都有直达班机，因此 A 和 D 之间存在空中通路。其余类推。

3. (a)、(b)是简单图。(c)是带环图，不是简单图，也不是多重图。(d)、(e)是多重图。

*4. 为了证明这道题，需要用到顶点的度数和图的总度数这些概念。如果让参加宴会的人作为图的顶点，两个熟人握一次手就在他们对应的顶点之间连上一条边。这样，一个人握手的次数就相当于他所对应的顶点的度数。由于图上顶点度数的总和 $2m$ 是偶数，所以，如果有奇数度数的顶点(相当于握过奇数次手的人)的话，那么，奇数度数的顶点一定要有偶数个，才能保证图的总度数是偶数。这就可以证得：在宴会上握过奇数次手的人一定有偶数了。

*5. 仍旧利用图的总度数 d 是偶数的关系。让图的顶点对应参加

学术讨论会的人，两个人讨论过问题，就在他们对应的顶点之间连上一条边。这样，某个顶点的度数就是和它所对应的人讨论过问题的人数。由于每个人至少和 3 个人讨论过问题，因此有不等式：

$$d \geqslant 3 \times 263 = 789。$$

又由于 d 一定是偶数，而 789 是个奇数，因此 d 至少是个不小于 789 的偶数，有：

$$d \geqslant 789 + 1 = 790。$$

这样，图上至少有一个顶点的度数大于或等于 4，因而这个顶点所对应的人至少和 4 位学者讨论过问题。

练 习 二

1. 从 A 点到 J 点的通路，一条是简单通路(A, B, C, F, G, H, I, J)，长度是7。另外还可以有两条有边重复的非简单通路，可以任答一条：(A, B, C, D, E, D, C, F, G, H, I, J)，长度是 11；(A, B, C, D, C, F, G, H, I, J)，长度是 9。

2. 图 16 上有 3 条不同的简单回路，它们是：(A, F, E, G, C, B, A)，长度是 6；(A, F, E, D, C, B, A)，长度也是 6；(E, D, C, G, E)，长度是 4。

3. 先给迷宫的各路口和死角分别标上数字 1, 2, …, 26，如图 132(a)所示。然后根据迷宫的连通情况，再画出图 132(b)。从图 132(b)可以看出顶点 A 和 C 是有路可以连通的，而 A 和 B 是无路可以

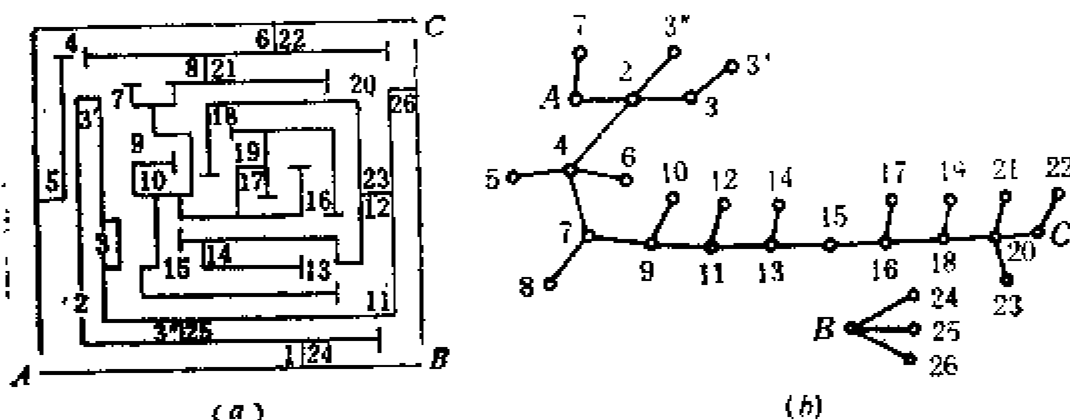


图 132

连通的。其中通路(A, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 20, C)是 A 到 C 的最近的通路。对应迷宫的图 132(b)是个不连通的图，它有 2 个连通支。

练　习　三

1. 图 23(a)、(b)、(d)都能一笔画出，而图 23(c)不能一笔画出，因为它有 4 个 3 度的顶点。图 23(b) 的起点必须选择椭圆图形中的奇数顶点。

2. 由于图 24 里对应每个交叉路口的顶点的度数都是偶数，因此这是个一笔画，所以园丁的打算是可以实现的。

3. 对应哥尼斯堡问题的图如图 133，图上的 4 个顶点对应哥尼斯堡的 4 块陆地，7 条边对应 7 座桥，原来的问题变成了判断这图是不是一笔画。

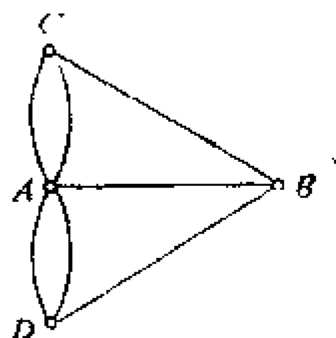
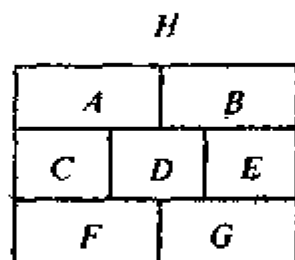


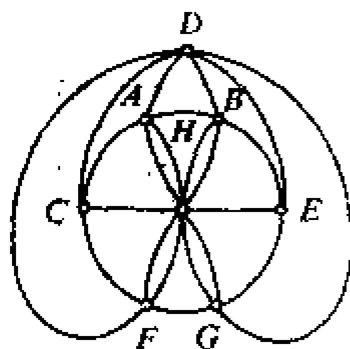
图 133

由于图上 4 个顶点的度数都是奇数，根据欧勒定理，这图不能一笔画出，因而哥尼斯堡的七桥问题的答案是不可能。

*4. 给图 26(a)图各块分别标上 A、B、C、D、E、F、G、H 如图 134(a)所示。然后画出相应的 8 个顶点，如图 134(a')。当图 134(a)上两块之间有一条公共边的时候，就在图 134(a')上对应这两块的



(a)



(a')

图 134

顶点之间连上一条边。这样，判断一条折线能否穿过图 26(a)里各边一次，就变成了判断图 134(a′)是不是一笔画的问题了。

由于图 134(a′)里 A、B、F、G 4 个顶点的度数都是奇数，这图不能一笔画出，因此对于图 26(a)来说，是不存在一条能穿过图上各边一次的折线的。

采用同样的方法可以画出图 26(b)图的分区图和对应图，如图 135(b)和(b′)。由于图 135(b′)除 A、B 2 顶点的度数各是 5 外，其余各顶点的度数都是偶数，所以只要以 A、B 作为起点和终点，就可以一笔画出。因此对于图 26(b)来说，是存在一条穿过图 的各边一次的折线的。

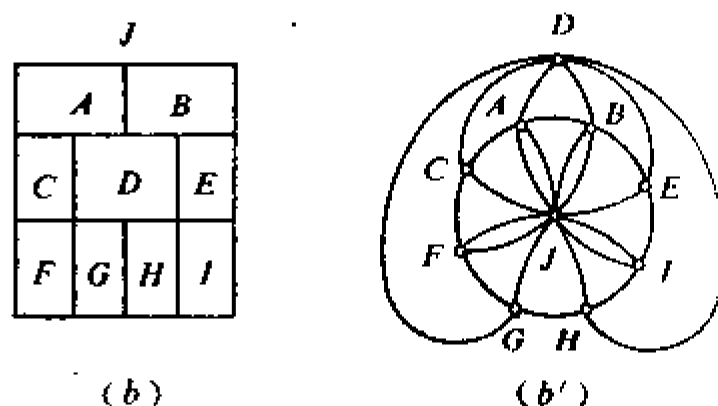


图 135

练　习　四

1、 K_4 如 136(a)所示，K_6 如图 136(b)所示

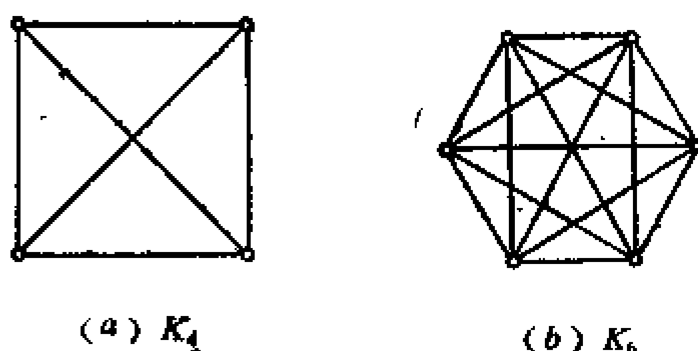

(a) K_4　　(b) K_6

图 136

2. $K_{1,5}$，$K_{4,7}$是一笔画。$K_{2,5}$，$K_{6,1}$不是一笔画。

3. 相当于已知完全图K_n的边数是 66 条，求它的顶点数 n。

根据完全图边数公式，有:

$$C_n^2=n(n-1)/2=66,$$

解方程，有

$$n^2-n-132=0,$$

$$(n+11)(n-12)=0,$$

求解，有

$$n_1=-11,\quad n_2=12,$$

又由于实际问题要求

$$n\geqslant 1,$$

所以，取 $n=12$，就是有 12 人参加了会议。

*4. 证明：由题意可知，K_n的顶点数 n 至少是 7。不失一般性，设K_n里顶点a_1关联 6 条红色的边到顶点a_2、a_3、a_4、a_5、a_6、a_7。由于是完全图，因此顶点a_2到a_7之间必然包含一个K_6。

由“红色K_3或蓝色K_3”一节所讲的内容可知：在K_6里或者有一个蓝色的K_3，或者有一个红色的K_3。

当a_2到a_7所包含的K_6里有一个红色的K_3的时候，比如由边(a_2, a_3)、(a_3, a_4)、(a_2, a_4)组成，这样，这 3 条边和由a_1引出的 3 条红色边(a_1, a_2)、(a_1, a_3)、(a_1, a_4)就组成了K_n里一个红色的K_4，如图 137(a)所示，图上实线表示红色边。

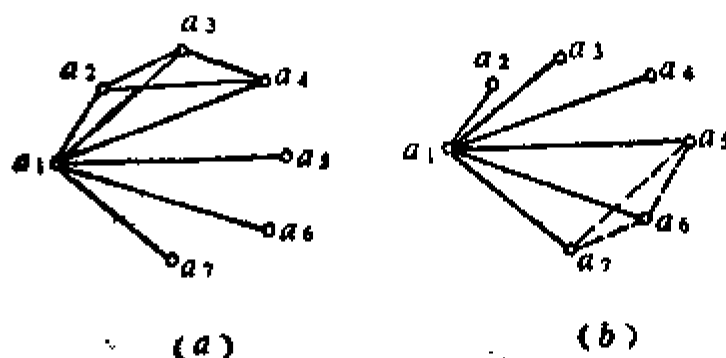


图 137

而当a_2到a_7所包含的K_6里有一个蓝色的K_3的时候，比如由边(a_5, a_6)、(a_6, a_7)、(a_5, a_7)组成，那么这个K_3也就是K_n中的蓝色K_3，如图 137(b)，图上虚线表示蓝色边。

*5．证明：设：K_9 的顶点是 a_1 到 a_9。每个顶点关联 8 条边，其中至少有 4 条边涂同一种颜色。下面，分两种情况分别加以讨论：

（1）如果 K_9 里有一个顶点，比如 a_1 有 4 条蓝色的边关联到顶点 a_2, a_3, a_4, a_5，如图 138(a)所示。根据题设：K_9 的任意一个 K_3 里至少有一条红色边，因此在由顶点 a_1，a_2，a_3 组成的 K_3 里，由于边 (a_1, a_2)、(a_1, a_3) 都涂上了蓝色，因此边 (a_2, a_3) 必然要涂上红色。同样道理，在由顶点 a_1 和 a_2、a_3、a_4、a_5 组成的其他的 5 个 K_3 里，由于其中由 a_1 引出的 2 条边都已经涂上了蓝色，因此剩下的一条边必然要涂上红色。这样，边 (a_2, a_4)、(a_2, a_5)、(a_3, a_4)、(a_3, a_5)、(a_4, a_5) 就都涂上了红色，它们和边 (a_2, a_3) 一起，正好组成了一个红色的 K_4。图上实线表示红色边，虚线表示蓝色边。

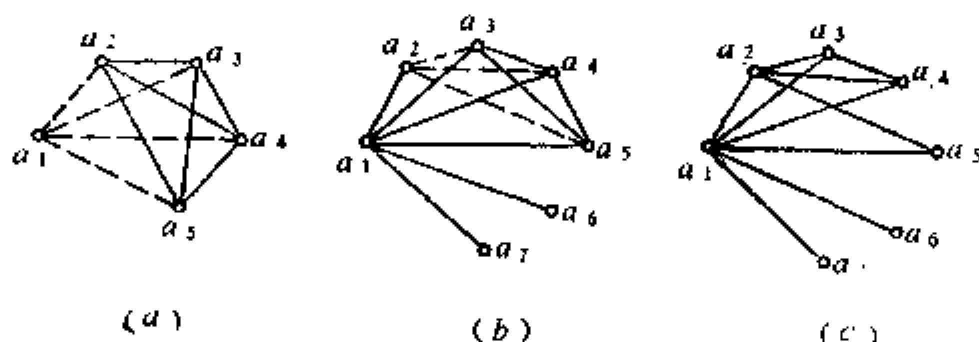


图 138

（2）如果 K_9 里没有一个顶点关联 4 条以上蓝色的边，也就是说，K_9 中每个顶点都关联至少 5 条红色的边。这时，K_9 中必然有一个顶点关联 6 条以上红色的边，因为如果每个顶点恰好关联 5 条红色边的话，那么对应这些红色边的顶点度数是 $5\times9=45$。由于一条边正好对应 2 度，所以，若干条边，比如 m 条边，所对应的度数是 $2m$ 度，一定是偶数。然而，45 却是个奇数，它不能对应整数条红色边，因此，K_9 里红色边所对应的度数总和应该是一个至少大于 45 的偶数，这样，K_9 里至少要有一个顶点有 6 度对应红色边，就是说这个顶点至少要关联 6 条红色边才行。我们设这个顶点是 a_1，它有红色边关联到顶点 a_2、a_3、a_4、a_5、a_6、a_7。这时，我们再分几种情况进行讨论：

一是如果顶点 a_2 和 a_3、a_4、a_5、a_6、a_7 之间有 3 条蓝色的边，比如是 $(a_2,\ a_3)$、$(a_2,\ a_4)$、$(a_2,\ a_5)$，如图 138(b)所示，那么根据"任意一个 K_3 里都至少含有一条红色边"这个条件，$(a_3,\ a_4)$、$(a_4,\ a_5)$、$(a_3,\ a_5)$ 都必然是红色边，它们和由 a_1 引出的 3 条红色边 $(a_1,\ a_3)$、$(a_1,\ a_4)$、$(a_1,\ a_5)$ 组成了一个红色的 K_4。

(ii)如果顶点 a_2 和 a_3、a_4、a_5、a_6、a_7 之间没有至少 3 条蓝色的边，那么一定有至少 3 条红色的边，设是 $(a_2,\ a_3)$、$(a_2,\ a_4)$、$(a_2,\ a_5)$，如图 138(c)所示。又由于顶点 a_3、a_4、a_5 组成的 K_3 里，也至少有一条红色的边，比如 $(a_3,\ a_4)$ 是红色边。这样边 $(a_2,\ a_3)$、$(a_2,\ a_4)$、$(a_3,\ a_4)$ 和由 a_1 引出的红色边 $(a_1,\ a_2)$、$(a_1,\ a_3)$、$(a_1,\ a_4)$ 就组成了一个红色的 K_4。如果由顶点 a_3、a_4、a_5 组成的 K_3 里的红色边不是 $(a_3,\ a_4)$ 而是 $(a_4,\ a_5)$ 或 $(a_3,\ a_5)$，也同样能组成一个红色的 K_4。

于是在各种情况下，都可以证明 K_9 里存在一个红色的 K_4。

*6. 可以用上题作为这个问题的数学模型。令 9 个人对应 K_9 的 9 个顶点。2 个人彼此认识，就在他们对应的顶点之间涂上红色边；2 个人不认识，就在他们对应的顶点之间涂上蓝色边。由于任意 3 个人之间都至少有 2 个人彼此认识，可知 K_9 里任意一个 K_3 都至少有一条红色边，这样，由上题证得 K_9 里存在一个红色的 K_4，就可以证得 9 个人中有 4 个人彼此认识。

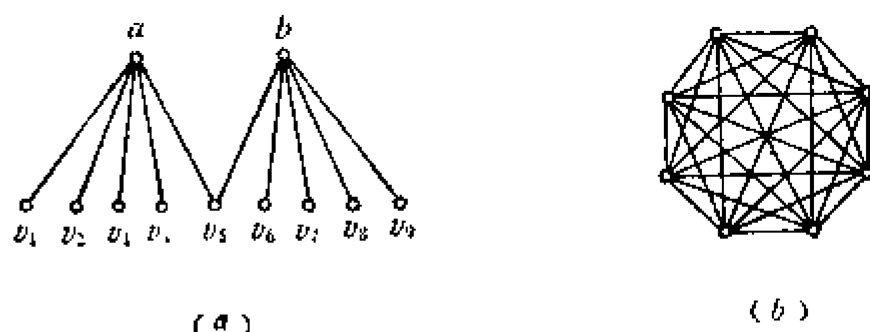
练　习　五

1. 图 36(a)是欧勒图，也是哈密顿图。图 36(b)是欧勒图，不是哈密顿图。图 36(c)是哈密顿图，不是欧勒图。图 36(d)既不是欧勒图，也不是哈密顿图，但是有哈密顿通路。

2. 设：a、b 是 8 位语言学家中的任意两位，v_1 到 v_9 表示 9 种不同的语言。

由于每位语言学家都至少会讲 9 种语言中的 5 种，不失一般性，设 a 会讲语言 v_1 到 v_5。如图 139(a)的左半部，把顶点 a 和顶点 v_1 到 v_5 之间分别连上边。又由于 b 会讲的 5 种语言中至少有一种和 a 会讲

的语言相同，比如 v_5。把顶点 b 和顶点 v_5 到 v_9 之间也分别连上边，如图 139(a)的右半部所示。这样，在 8 位学者中，任意两位学者都至少有一种语言是他们都会讲的，也就是说，8 位语言学者中，任意两个人都可以交谈。对应 8 位学者彼此可以交谈的情况，再作一个图，就可以得到一个 K_8，它的 8 个顶点代表 8 位学者，而边表示所关联顶点对应的两位学者可以彼此交谈，如图 139(b)所示。



(a) (b)

图 139

这样，找一个座位安排问题就变成了如图 139(b)里的一条哈密顿回路问题了。由于 K_8 里不同的哈密顿回路共有 $7!/2$ 种，因此 8 位学者围着圆桌开会，可以任意安排座位(因为每两个人彼此都可以交谈)，但不同的安排方式共有 $7!/2$种。

由这个问题，可以推广到求一般的完全图 K_n 的哈密顿回路条数问题。对于有 n 个顶点($n\geqslant 3$)的完全图来说，它总是存在哈密顿回路的，并且不同的哈密顿回路共有 $(n-1)!/2$ 条。

*3. 设：6 个顶 a、b、c、d、e、f表示 6 个男孩，而 6 个顶点 a'、b'、c'、d'、e'、f'表示 6 个女孩。由于每个男孩可以和任意一个女孩相邻，而和其他男孩不相邻，这样在顶点 a 和顶点 a' 到 f' 之中每一个都有边关联，而在顶点 a 和顶点 b 到 f 之间没有边关联，对顶点 b 到 f 作同样处理。由于 2 个男孩不能相邻，因此 2 个女孩也不可能相邻，就是顶点 a' 到 f' 之间彼此也没有边关联。这样，可以得到图 140。

于是，原来的问题就归结成为求图里各条边互不重合的哈密顿回路的条数。这样的哈密顿回路共有 3 个，它们是：

$(a,\ a',\ b,\ b',\ c,\ c',\ d,\ d',\ e,\ e',\ f,\ f',\ a)$;

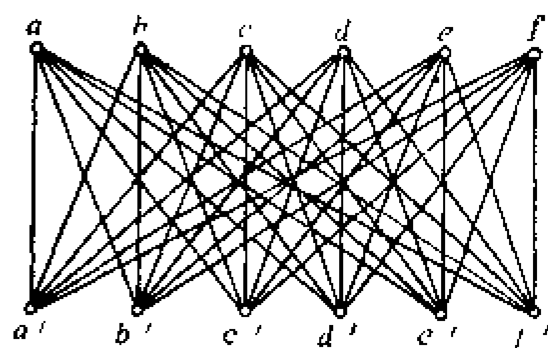


图 140

$(a,\ c',\ b,\ d',\ c,\ e',\ d,\ f',\ e,\ a',\ f,\ b',\ a)$;

$(a,\ e',\ b,\ f',\ c,\ a',\ d,\ b',\ e,\ c',\ f,\ d',\ a)$.

它们各自对应一个由 12 个小孩组成的圆圈。同一个男孩在不同的圆圈里和不同的女孩相邻，而和其他的男孩不相邻。

练　习　六

1. 仍然采用试探的方法。可以判断这 3 个图都有哈密顿通路。图 141 中对每个图都给出一个具体的解答。其中，每个图上打“△”的顶点表示通路的起点，打“▲”的顶点表示通路的终点，用箭头表示通路的走向。

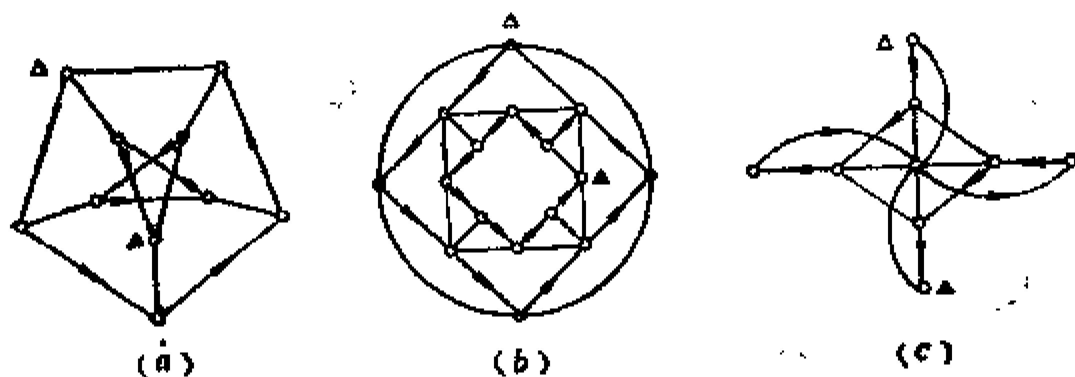


图 141

2. 设：7 个顶点对应 7 个小孩。如果两个小孩彼此认识，就在他们对应的两个顶点之间连上一条边。由于每个小孩至少认识 3 个小

孩，所以每个小孩对应的顶点都至少关联3条边，也就是每个顶点的度数至少是3。这样，每2个顶点的度数的和就至少是6。根据判断定理第一条，这个图是有一条哈密顿通路的，通路上每条边关联的顶点所对应的两个小孩彼此认识。因此，按照这条通路上顶点的顺序把小孩排成一行，就可以使得每个小孩和他相邻的小孩都认识。

3．设：8个顶点对应8种原料。由于2种原料搭配成一种菜，就在它们对应的顶点之间连上一条边。由于每种原料都至少用在4种菜里，也就是它至少分别和4种不同的原料搭配，所以每个顶点的度数至少是4，每2个顶点度数的和是8。根据判断定理第二条，这个图是有哈密顿回路的。在这条长度是8的回路上一定可以找到4条彼此不相邻的边，它们关联的8个顶点彼此是不相同的，这正好对应4种不同的菜，它们包括了8种不同的原料。

*4．用黑色和白色分别对棋盘上方格的顶点进行标记，得到图142。

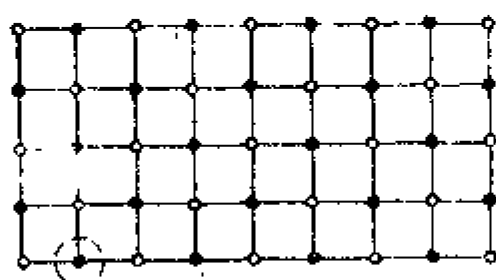


图 142

由于图上任意一个“日”字对角线上两个顶点的颜色不同，所以马从原地出发跳奇数步后只能跳到和出发点颜色不同的顶点上去。比如，如果马原来所在的方格顶点是标成黑色的，那么马跳奇数步后，只能跳到标记是白色的顶点上，而无论如何也跳不到黑色顶点上去。因此，本题的答案是：马跳奇数步后，是不会跳回原来的出发点的。

*5．由于两个方格盘都是黑、白格交错的，如果用一张大小是两个方格的硬纸片去覆盖，纸片每次恰好盖住一个黑格和一个白格。这样，只有当方格盘上黑格和白格的格数相等的时候，才有可能被若干张硬纸片覆盖完，并且每个方格正好被覆盖一次。

图46（*a*）的方格盘，黑、白格的格数正好相等，都是18。因此有可能用18张硬纸片覆盖完，而实际上确实能进行这种覆盖。图46（*b*）的方格盘，黑格比白格多2格，因此无法用若干张硬纸片把方格盘覆盖完。

*6. 设：7 个顶点对应 7 门不同的考试课程。在不是同一位老师教的考试课程对应的顶点之间连上边，那么图上的边就表示它所关联的顶点对应的课程是可以安排在接连的两天里进行考试的。

由于同一位老师教的考试课程最多是 4 门，因此对于图上任何一个顶点来说，它至多和 3 个顶点不邻接，也就是说，它至少要和另外 3 个顶点邻接。这样，这个图的每个顶点的度数都至少是 3，因而每 2 个顶点的度数的和至少是 6，根据哈密顿通路判断定理第一条，这个图上是存在一条哈密顿通路的。又由于通路上任何一条边关联顶点对应的两门课不是同一位老师教的，所以，可以按照这条哈密顿通路上的顶点顺序安排 7 门课的考试。

练 习 七

1. 设：4 个顶点表示 4 个人。如果其中甲比乙的年龄大，那么有有向边<甲，乙>。对应本题的有向图如图 143 所示。

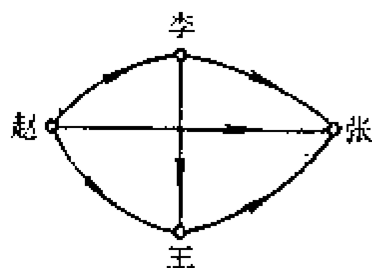


图 143

2. 图 53 的有向通路如下：

$a\to b$; $a\to c$; $a\to b\to c$; $a\to b\to e$;

$b\to c$; $b\to e$; $d\to a$; $d\to e$; $d\to f$;

$d\to a\to c$; $d\to a\to b$; $d\to a\to b\to c$;

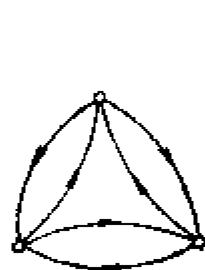
$d\to a\to b\to e$; $d\to f\to c$; $d\to f\to e$;

$d\to f\to g$; $a\to f\to g\to e$; $f\to c$; $f\to e$;

$f\to g$; $f\to g\to e$; $g\to e$。

3. 如图 144 所示。

4. 对应比赛战绩表的有向图如图145所示，其中有向边是这样确定的：如果甲战胜了乙，就有边‹甲，乙›。


(a) K_3

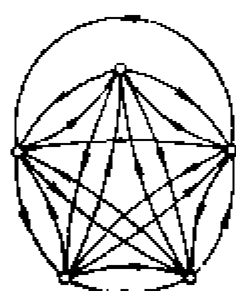

(b) K_5

图 144

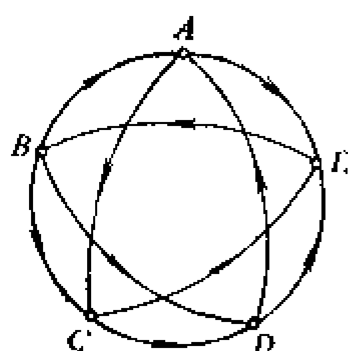


图 145

其中，B 是3胜1负，得胜局最多；而 E 是3负1胜，得败局最多。A、C、D 都是2胜2负，胜、败局占各一半。

5. 图54 (*a*) 是强连通图，图54 (*b*) 是单向连通图，而图54 (*c*) 是弱连通图。

练 习 八

1. 以下几组图是同构的：

(1) (*a*)、(*e*)；

(2) (b)、(*h*)、(*j*)；

(3) (*c*)、(*d*)、(*f*)、(*k*)；

(4) (*g*)、(*i*)。

2.

图60 (*a*) 的两个图是同构的，顶点的对应关系如下：

左图	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
右图	u_2	u_3	u_4	u_1	u_5	u_6

图60 (*b*) 的两个图不是同构的，一个明显的事实是：每个图里都恰有2个度数是3的顶点，其中左图里度数是3的两个顶点 v_3 和 v_4 邻接，而在右图里度数是3的两个顶点 u_2、u_5 却不邻接，因此

这两个图顶点的邻接关系是不相同的。

图 60 (c) 的两个图是同构的，它们顶点的对应关系如下：

左图	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
右图	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_1	u_{10}	u_8	u_9

3. 有 3 个顶点 4 条边的无环的非同构的无向图有 4 个，如图 146 所示。

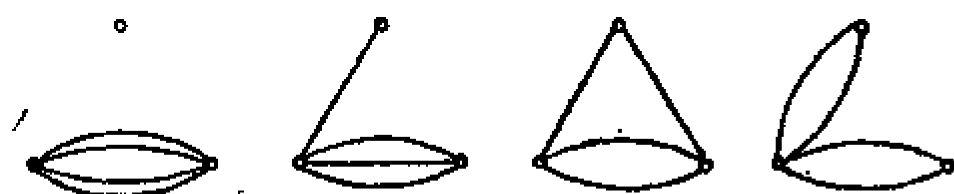


图 146

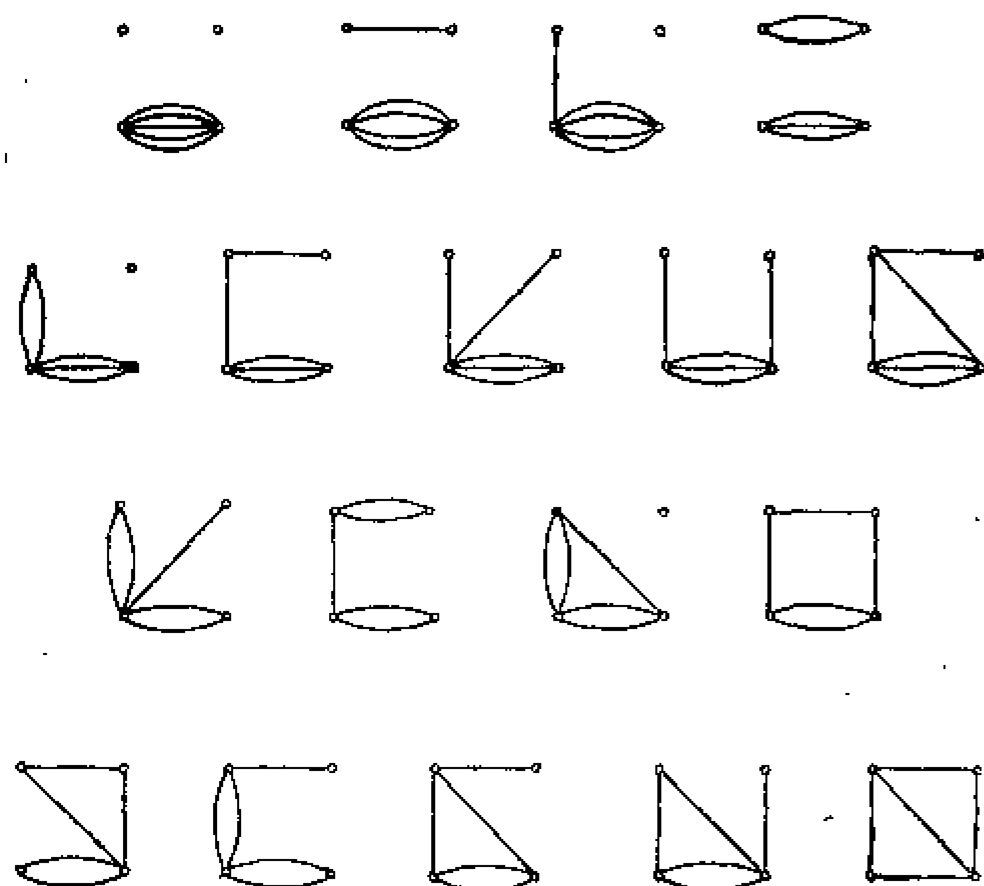


图 147

4. 有4个顶点5条边的无环的非同构的无向图有18个，如图147所示。

练 习 九

1. 各关系所属的类型如下：

a. 自返关系，对称关系，不传递关系。

b. 非自返关系，反对称关系，传递关系。

c. 如果不管谁高谁矮，那么是非自返关系，对称关系，不传递关系；如果指谁比谁高，那么是非自返关系，反对称关系，传递关系。

d. 非自返关系，反对称关系，传递关系。

e. 如果不管哪个数大哪个数小，那么是非自返关系，对称关系，非传递关系；如果指哪个数比哪个数大，那么是非自返关系，反对称关系，传递关系。

f. 自返关系，对称关系，传递关系。

g. 非自返关系，反对称关系，传递关系。

h. 自返关系，反对称关系，传递关系。

i. 自返关系，反对称关系，传递关系。

j. 自返关系，对称关系，传递关系。

k. 自返关系，反对称关系，传递关系。

l. 自返关系，反对称关系，传递关系。

2. 对应3种关系的图如图148所示。

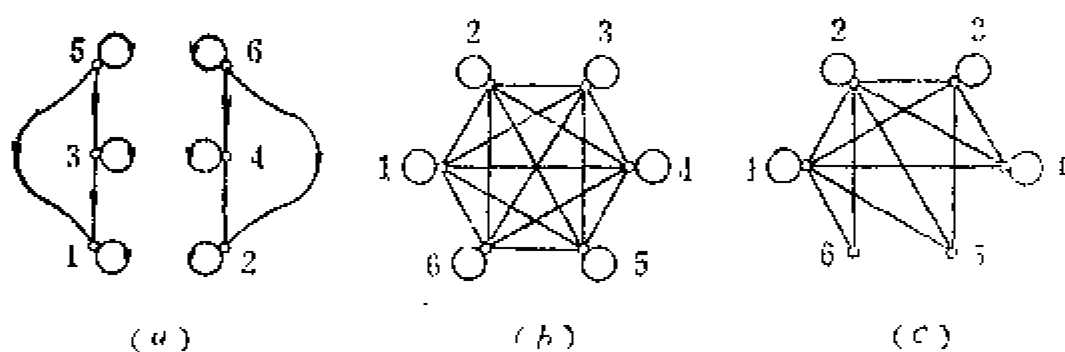


图 148

(a) 是自返关系，反对称关系，传递关系。 (b) 是自返关系，对称关系，传递关系。 (c) 是不自返和不非自返关系，对称关系，不传递关系。

3． 各图所表示的关系是：

(a) 非自返关系，对称关系，不传递关系。

(b) 非自返关系，对称关系，传递关系。

(c) 不自返关系和不非自返关系，对称关系，不传递关系。

(d) 自返关系，对称关系，不传递关系。

(e) 非自返关系，反对称关系，不传递关系。

(f) 非自返关系，反对称关系，传递关系。

(g) 非自返关系，对称关系。

(h) 非自返关系，不对称和不反对称关系，不传递关系。

(i) 非自返关系，对称关系，不传递关系。

(j) 自返关系，对称关系，传递关系。

(k) 自返关系，反对称关系，不传递关系。

(l) 自返关系，反对称关系，不传递关系。

(m) 自返关系，反对称关系，传递关系。

练 习 十

1． 具有3个顶点的无向树只有1种，如图149所示。

具有3个顶点非同构的有向树有3种，如图150所示。



图 149

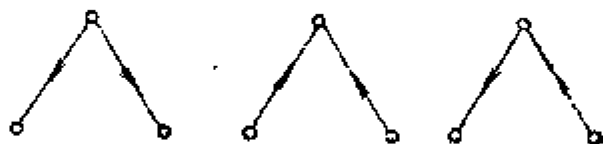


图 150

具有3个顶点的非同构的有序树有2种，如图151所示。

2． 具有5个顶点非同构的无向树有3种，如图152所示。

*3． 具有7个顶点非同构的无向树有11种，如图153所示。

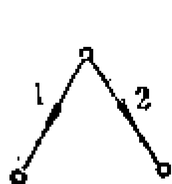


图 151

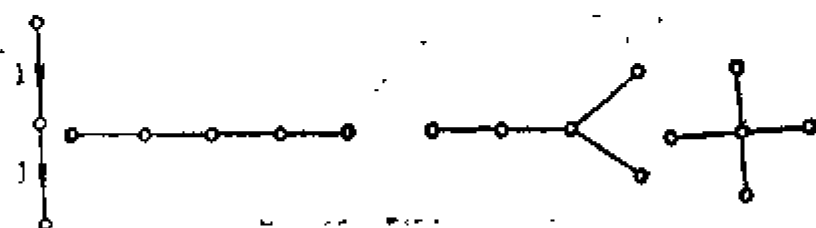


图 152

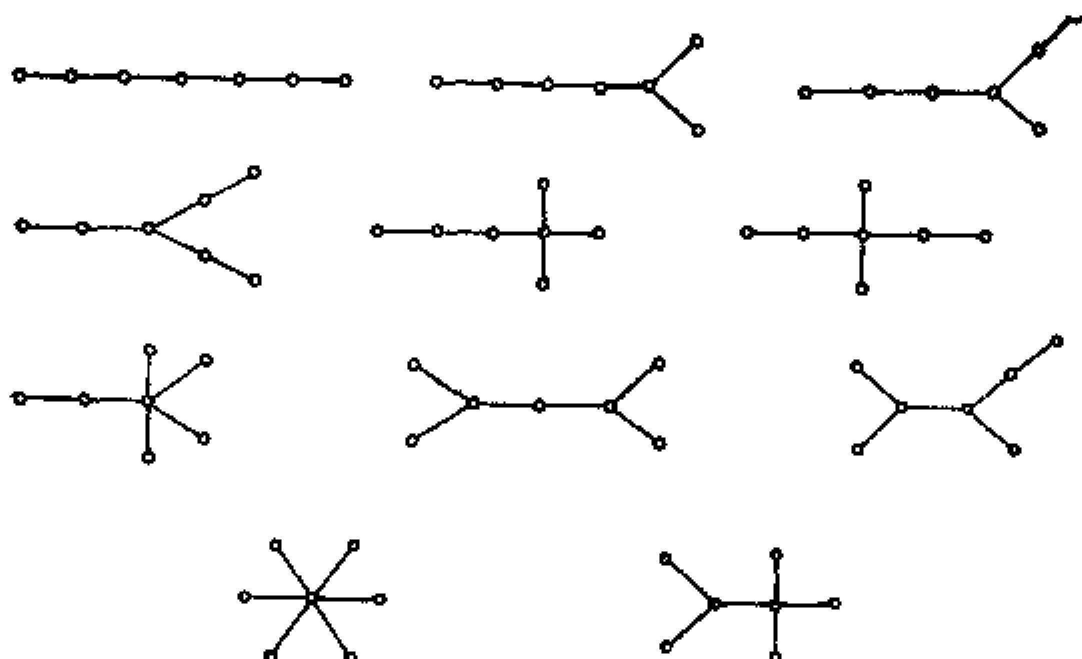


图 153

4. 要进行 15 场比赛才能决出冠军。

5. 在图 79 的树中。

(a) 顶点 v_4 的父亲是 v_2;

(b) 顶点 v_4 的儿子是 v_9, v_{10};

(c) 顶点 v_4 的一个祖先是 v_1;

(d) 顶点 v_4 的一个后代是 v_{15}(或 v_{16}。v_{17});

(e) 以顶点 v_4 作为树根的子树由图 154 里虚线框里的图组成;

(f) 顶点 v_4 的子树共有 2 个，分别由图154里两个实线框里的图组成。

6. 对图 79 的各条边排序如图 155 所示。

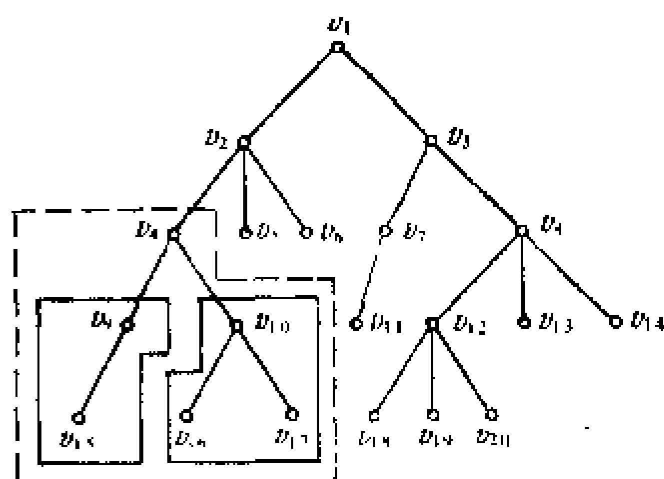


图 154

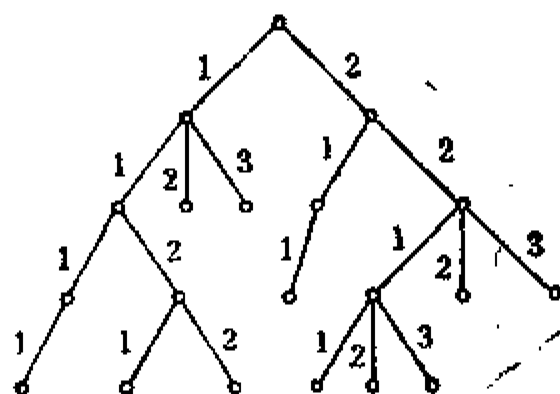


图 155

7. 对于图80中的根树，用三种方法写出的程序如下：

(a) $\cdot \oplus + x_1 \bar{x}_2 \cdot x_3 \bar{x}_4 \oplus x_5 x_6$;

(b) $((x_1 + \bar{x}_2) \oplus (x_3 \cdot \bar{x}_4)) \cdot (x_5 \oplus x_6)$;

(c) $x_1 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_4 \cdot \oplus x_5 x_6 \oplus \cdot$.

8. 对于图 81 里的二元树，用三种方法写出的 顶 点顺序如下：

(a) $a\ b\ d\ g\ e\ h\ i\ c\ f\ j\ k$;

(b) $g\ d\ b\ h\ e\ i\ a\ c\ j\ f\ k$;

(c) $g\ d\ h\ i\ e\ b\ j\ k\ f\ c\ a$.

练 习 十 一

1. 树叶的权分别是 3 、 5 、 7 、 9 、 10 的最优二元树如 156 图所示。它的权

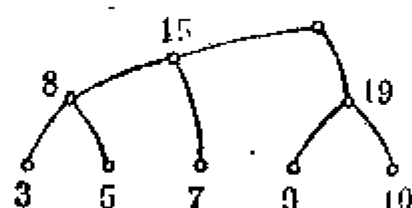


图 156

它的权为$w(T)=(3+5)\times 3+(7+9+10)\times 2=76$。

2. 树叶的权分别是 2、4、6、8、10、12、14、16 的最优二元树如图 157(a)所示，

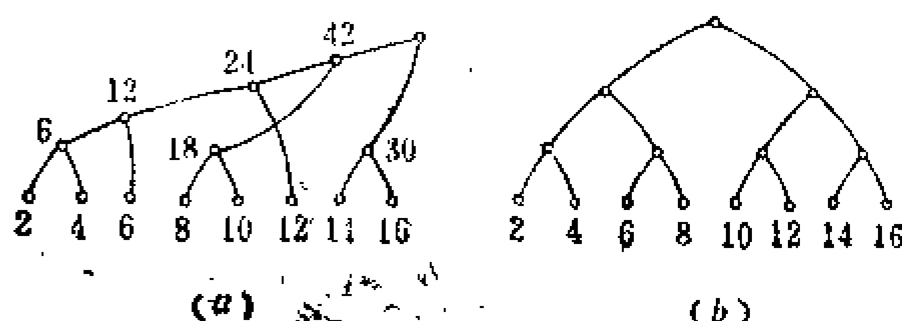


图 157

它的权为 $w(T)=(2+4)\times 5+6\times 4+(8+10+12)\times 3$

$$+(14+16)\times 2=204.$$

而树叶的权分别同上的一棵非最优二元树，如图 157(b)所示，它的权为

$w(T')=(2+4+6+8+10+12+14+16)\times 3=216$。

3. 最小支撑树如图 158 所示，这棵最小支撑树的权是 10。

4. 最小支撑树如图 159 所示，这棵最小支撑树的权是 12。

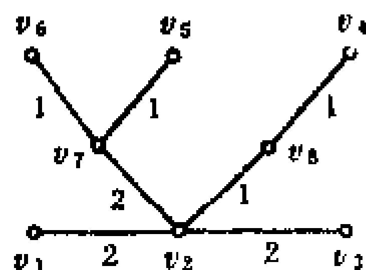


图 158

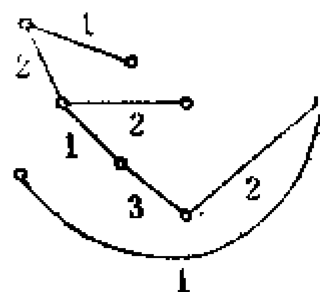


图 159

*5．分两种情况来求解。

第一种情况：如果第一次课是实验课，那么对应四次课以后是理论课或实验课的概率树如图 160 所示。

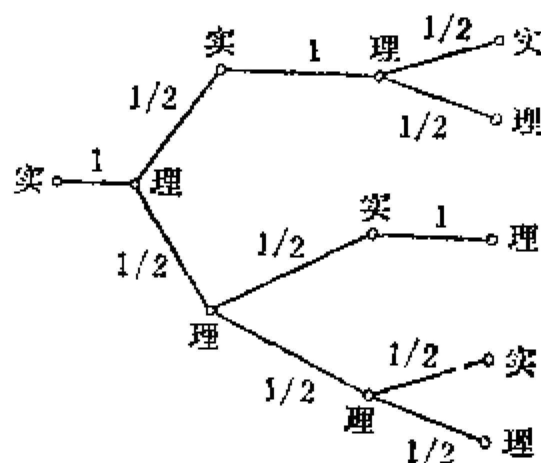


图 160

由这棵概率树可以计算出：如果第一次课是实验课，4 次课以后上实验课的概率是：

$$P_1 = 1 \times 1/2 \times 1 \times 1/2 + 1 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 3/8,$$

而上理论课的概率是：

$$P_2 = 1 - P_1 = 5/8.$$

第二种情况：如果第一次课是理论课，那么对应 4 次课以后是理论课或实验课的概率树如图 161 所示。

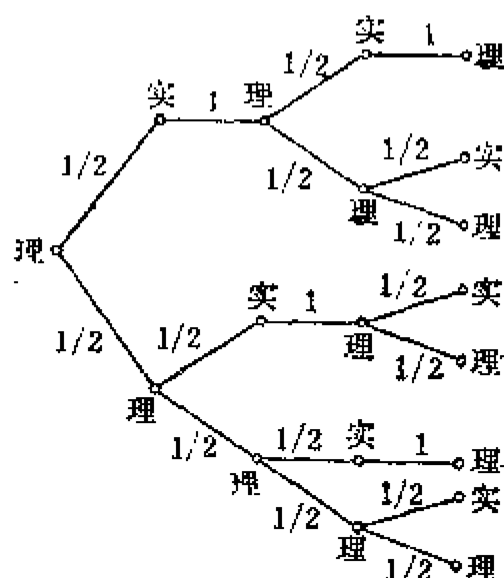


图 161

由这棵概率树可以计算出：如果第一次课是理论课，4 次课以后上实验课的概率是：

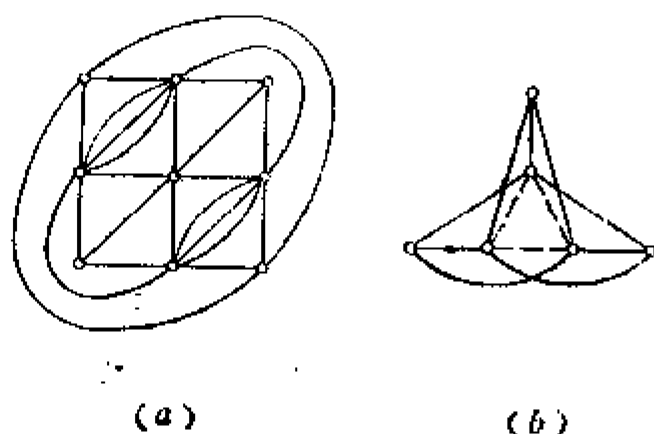
$$P_1 = 1/2 \times 1 \times 1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2 \times 1 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = \frac{5}{16}.$$

而上理论课的概率是：

$$P_2 = 1 - P_1 = 11/16.$$

练习十二

1. 图99(a)是平面图，可以重新把它画成一个没有两条边在顶点之外相交的图，如图162(a)所示。

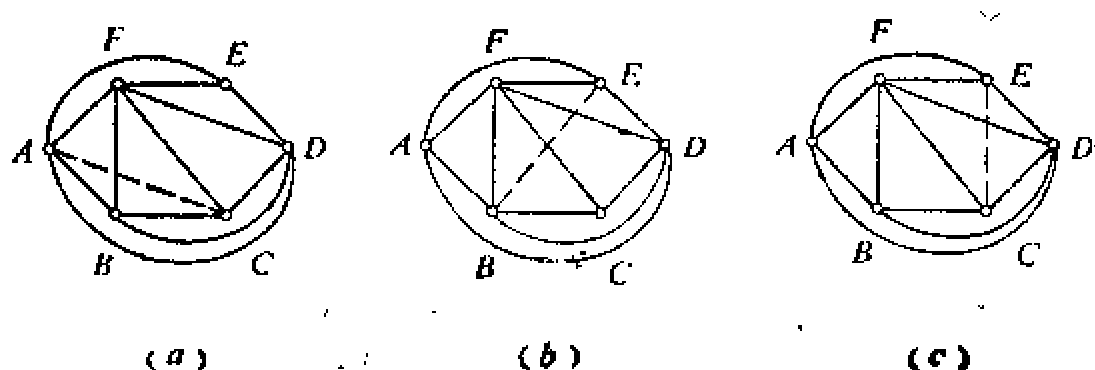


(a)　　　　(b)

图 162

图99(b)图是个非平面图，实际上它包含了一个$K_{3,3}$图，如图162(b)里实线图部分所示。

2、原图是个平面图，图上不相邻的顶点共有3对：A和C、B和E以及E和C。当在图上分别添加上边(A, C)、(B,E)、(E, C)的时候，得到的都是非平面图，如图163的(a)、(b)、(c)。所以，根据极大平面图的定义，原图是个极大平面图。



(a)　　　　(b)　　　　(c)

图 163

3. 图101(a)左侧包含了一个$K_{3,3}$图，图101(b)上部包含了一个K_5图，分别如图164(a),(b)里的实线图。因此根据库拉托夫定理，这两个图都是非平面图。

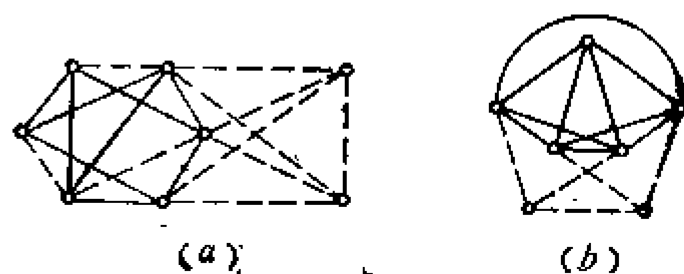


图 164

*4. 具有6个顶点的非同构的连通的简单非平面图共有13个，如图165所示。

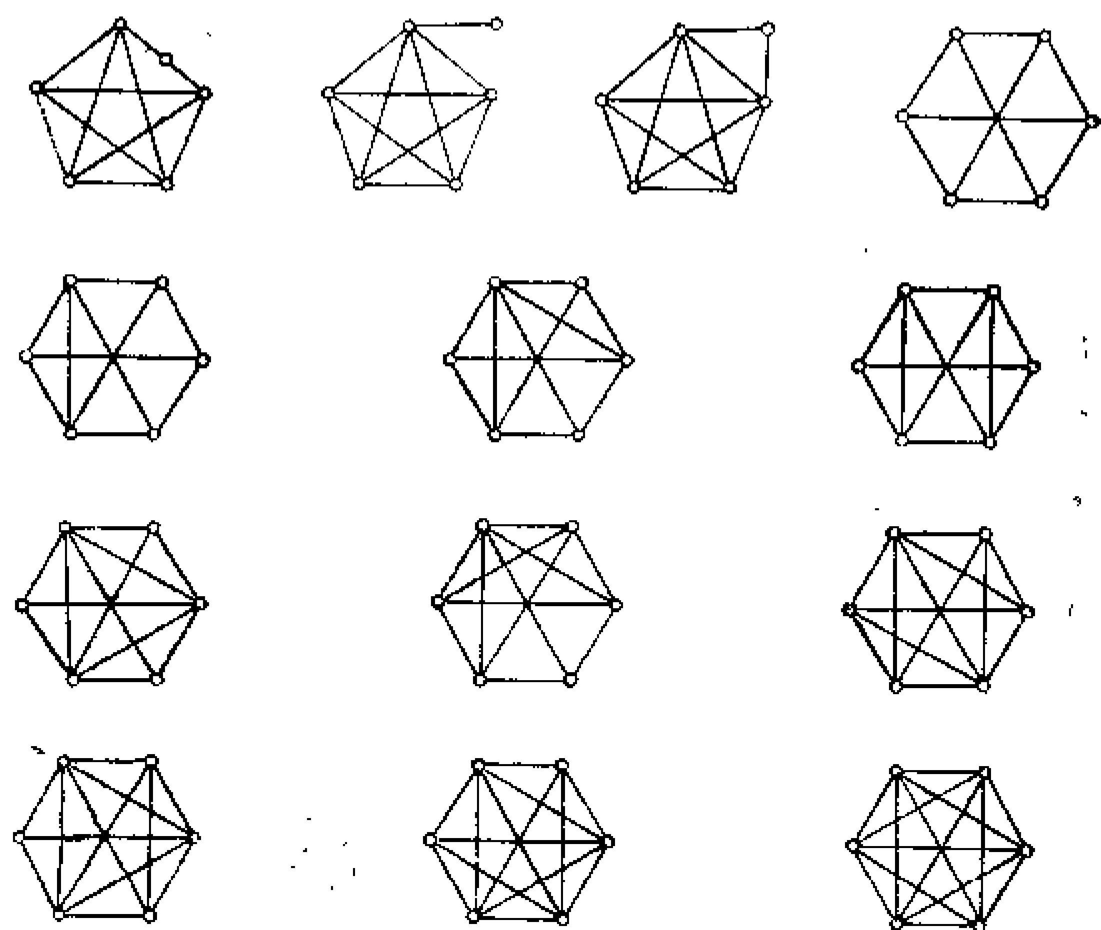


图 165

练习十三

1. 图111(*a*) 顶点的色数是4，图111(*b*) 顶点的色数是3，图111(*c*) 顶点的色数是4。具体的着色方法如图166所示。

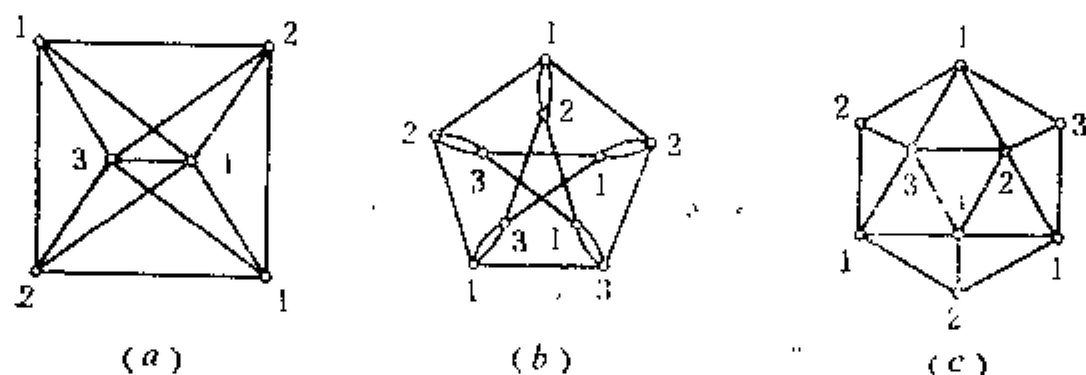


图 166

2. 图112 (*a*) 有限区域的色数是3，图112 (*b*) 有限区域的色数是4。具体的着色方法如图167所示。

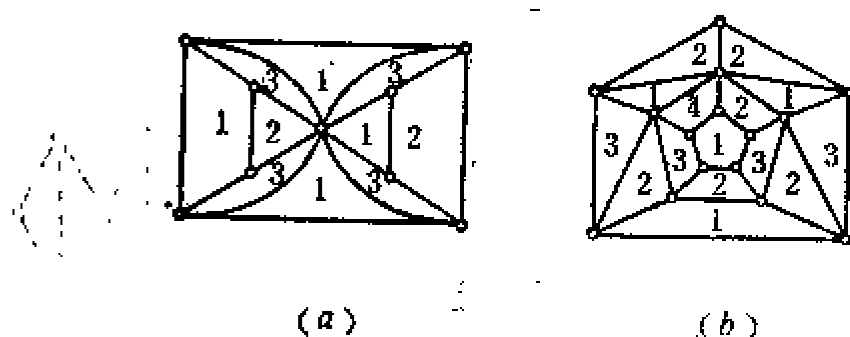


图 167

3. 图113(*a*)、(*b*)、(*c*)的原图和对偶图如图168(*a*)、(*b*)、(*c*)

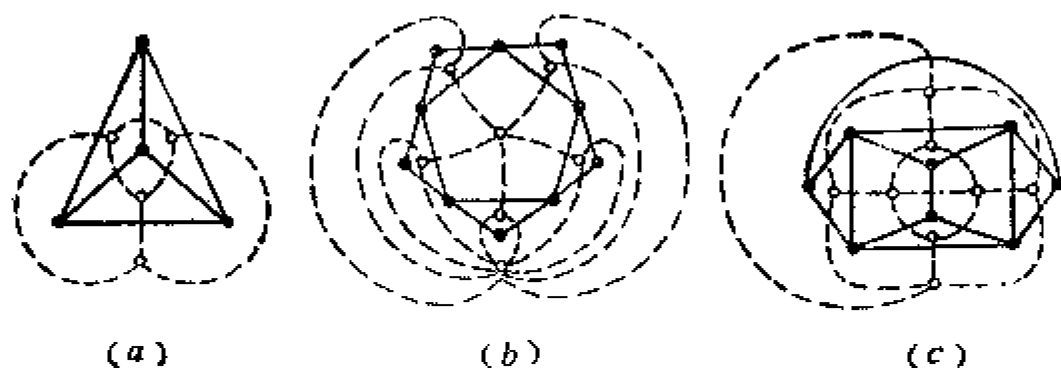


图 168

所示，原图用实心点和实线画出，对偶图用空心点和虚线画出。

4. 图113 (*a*) 是唯一可着色的，它的色数是4，它一共有4个色组，每个色组只包含一个顶点。而图113(*b*)、(*c*)的色数都是3，并且都不是唯一可着色的。

练 习 十 四

1. 如图169所示。图上标出了用所给算法求解过程中走到的所有路径。*a*点到*z*点最短路径的长度是14。

2. 如图170所示。A_1到C_4最短路径的长度是8，这题的最短路径不是唯一的。你能再找到一条吗？

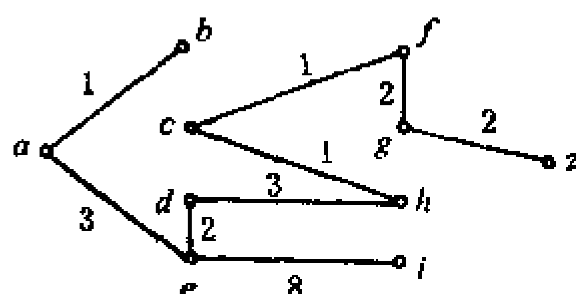


图 169

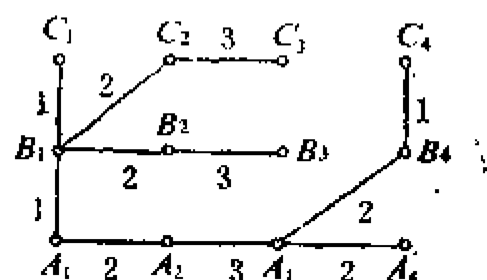
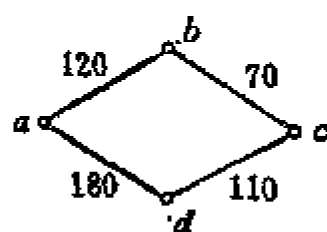
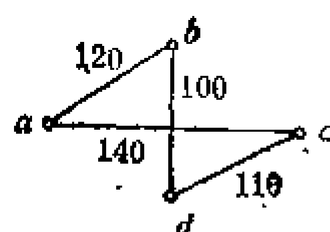


图 170

3. 用最邻近法求得图121里以*a*作为起点和终点的最短哈密顿回路是480，如图171 (*a*) 所示。实际上的最短哈密顿回路的长度是470，如图171 (*b*) 所示。



(*a*)



(*b*)

图 171

练 习 十 五

1. 对应这个问题的解如图 172 所示。

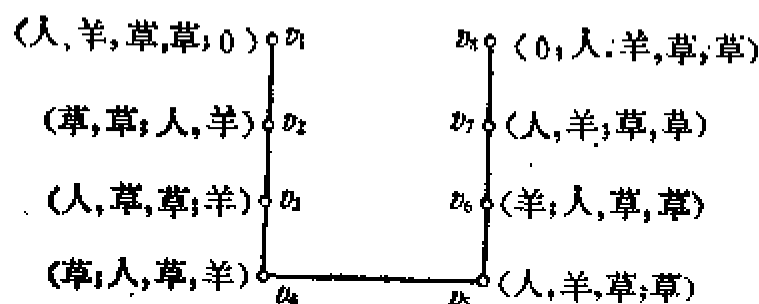


图 172

图 172 里从顶点 v_1到 v_8 (或相反)的这条通路就是这个人将全部东西从左岸带到右岸（或相反）的具体渡河路线。

*2. 由于三对父女之间的对称性，我们令所允许的搭配状态是（三父三女；0)，(二父二女；一父一女)，等等，这里的“一父一女”就表示一位父亲和他的女儿。这样，可以得到 11 种状态，令它们对应11个顶点 v_1到 v_{11}。在经过一次渡河后可以互相转化的状态间连上边，于是得到图 173。设三位父亲和女儿开始都在河左岸。

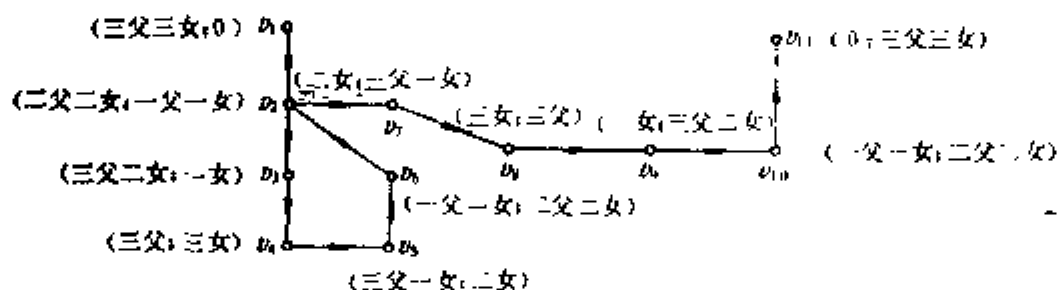


图 173

从图 173 可以看出，顶点 v_1到 v_{11}之间有一条通路，按照这条通路上顶点的顺序安排过河，就可以满足三个女孩淘气的主意。注意：这条通路要把图上的所有顶点都走到。

*3. 这个问题无非是找一条从初始状态（6 个键都在上方）到最终状态（6个键都在下方)的通路，因此解决方法和解渡河问题是相同

的。令 $X_{i,j}$ 表示上方键的允许状态，这里 i、j 分别表示红色键和黑色键的个数；令 $Y_{i,j}$ 表示下方键的允许状态，这里 i、j 也分别表示红色键和黑色键的个数。这样，上、下方所允许的状态各是 9 种，各对应 9 个顶点，如图174所示。在互相可以转换的顶点之间连上边，然后找一条从初始状态 $X_{3,3}$ 到最终状态 $Y_{3,3}$ 的通路，这就是问题的解答。从图上我们可以看出，这样的通路不止一条。有一条是由顶点

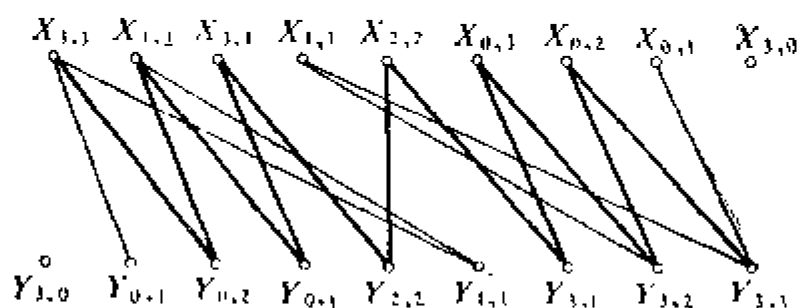


图 174

$X_{3,3}$、$Y_{0,2}$、$X_{3,2}$、$Y_{0,3}$、$X_{3,1}$、$Y_{2,2}$、$X_{2,2}$、$Y_{3,1}$、$X_{0,3}$、$Y_{3,2}$、$X_{0,2}$、$Y_{3,3}$ 组成的。这条通路在图上用粗线描了出来。

4. 设顶点 v_1、v_2、v_3、v_4 分别对应语文老师、算术老师、地理老师、体育老师，顶点 u_1、u_2、u_3、u_4 分别对应第一到第四节课。

在各位老师和他们能安排上课的节数之间连上边，这样得到图175，给四位老师安排上课时间的问题就变成了在图 175 里找一组匹配线的问题。这组匹配线如图里的粗体线所示。这样得到的分配方案是：语文老师上第一节课，算术老师上第二节课，地理老师上第三节课，体育老师上第四节课。

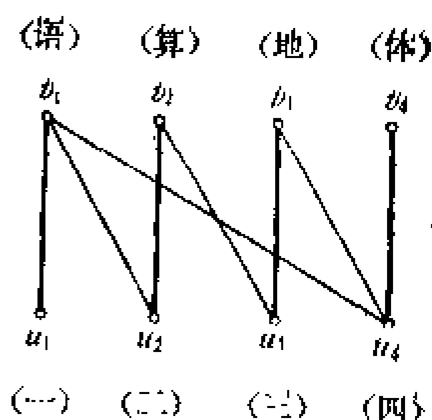


图 175

5. 转变成证明相应的偶图存在匹配的问题。令顶点 v_1 到 v_n 对应 n 个小伙子，顶点 u_1 到 u_n 对应 n 个姑娘，在彼此认识的小伙子和姑娘之间连上边，这样可以得到一个偶图。由于每个小伙子至少认识

2个姑娘，第一组顶点 v_1 到 v_n 中的每个顶点都至少关联2条边，就是每个顶点的度数至少是2。而由于每个姑娘至多认识2个小伙子，第二组顶点 u_1 到 u_n 中的每个顶点的度数至多是2。令 $t=2$，这样，根据判断偶图匹配存在的第二条定理，偶图里存在从第一组顶点到第二组顶点的匹配，这个匹配给出的正好是 n 对舞伴的搭配关系，在每组舞伴中的小伙子和姑娘是彼此认识的。

6. 仍然变成证明偶图存在匹配的问题。令顶点 v_1 到 v_{10} 对应10个读者，顶点 u_1 到 u_{10} 对应10个问题。在读者和他所回答的问题之间连上边，这样可以得到一个偶图。根据题意，由于每个读者正好提供了2个不同问题的答案，因此顶点 v_1 到 v_{10} 中的每个顶点度数都是2。而由于每个问题都正好有2份答案，就是正好有2个人回答，因此顶点 u_1 到 u_{10} 中的每个顶点的度数也都是2。这样，根据判断偶图匹配存在的第2条定理，令 $t=2$，那么这偶图里存在匹配，这组匹配给出了10个读者和10个问题(答案)之间的对应关系，所以编辑部的打算是可以实现的。

7. 第一个取球的人例如甲，先从装有65个球的箱子里取走15个，这样就留下了球数相等的两箱球给乙。在以后的步骤中，只要甲每次取完球后，总是留给乙球数相等的两箱球，那么甲一定取胜。

8. 第一个取火柴的人先把一堆火柴(10根)全取走。其余步骤同第7题，那么第一个取火柴的人一定取胜。

9. 根据题意，可以作出图176。为了清楚起见，图上只画出了选手甲取胜的对策路线。

由图176可以看出，后走的一方(这里是甲)，只要使对方顺次处

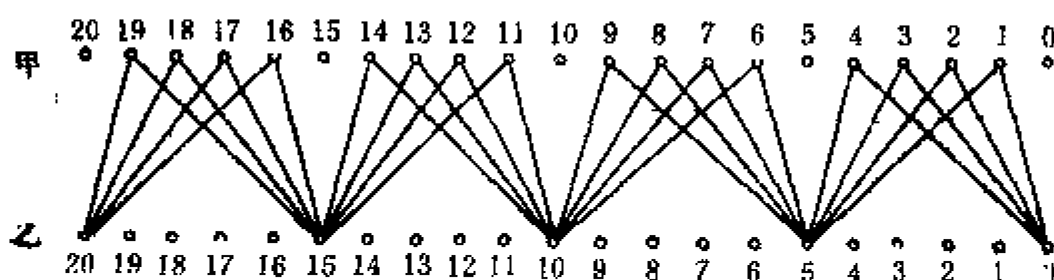


图 176

在 15、10、5 的布局中，那么一定取胜。

*10. 以甲取胜来说明怎样选择对策。甲为了首先报到100，他在前一次必须报到89，这样，无论乙报什么数(10以内的)，也报不到100。而甲要能报到89，再前一次必须报到78，这样往回推下去，甲必须依次报到67、56、45、34、23、12、1，所以甲为了最后取胜，必须先第一次只报1，然后每次报的数的个数和乙报的个数的和正好是11，也就是依次抢到12、23、34、45、56、67、78、89，那么甲一定能取胜。

后　　记

五年前，也是这样的深冬时节，我第一次翻开了一本图论的书，一个新奇美妙的世界突然展现在我眼前，使我感到一种异样的喜悦。

在这以后的教学过程中，看到学生学习图论的兴趣也很浓厚，一个愿望在我心里渐渐萌发：为什么不能以一种通俗的形式，把这门有趣而又有用的学科介绍给更多的人，尤其是广大的青少年呢？

于是，我利用了几个假期，寒来暑往，时断时续地写下了这本小册子的初稿、二稿，现在终于问世的，已经是第三稿了。

在这里，我要感谢科学院系统研究所的裘宗沪同志，他在百忙之中审阅了全稿，并且提出了不少中肯的意见，使我受益非浅。

作为一个后学者，水平自然是有限的，加之写这类科普读物还是初次，疏漏不妥之处可能不少，我恳切希望听到读者的批评、指教。

在这个世界上，无论做什么事——大到搞社会变革，小到如我写这么一本小册子——怕都是不很容易的，尤其艰难的是迈出这第一步。不过，如果深信所做的事是值得做的，那么，这第一步就应该勇敢地迈出去。

作　者

1985年2月于京西W园